

FR 00/189

09/869966

## BREVET D'INVENTION

10/8

CERTIFICAT D'UTILITÉ - CERTIFICAT D'ADDITION

COPIE OFFICIELLE

PRIORITY  
DOCUMENT  
SUBMITTED OR TRANSMITTED IN  
COMPLIANCE WITH RULE 17.1(a) OR (b)

Le Directeur général de l'Institut national de la propriété industrielle certifie que le document ci-annexé est la copie certifiée conforme d'une demande de titre de propriété industrielle déposée à l'Institut.

Fait à Paris, le 01 FEV. 2000

Pour le Directeur général de l'Institut  
national de la propriété industrielle  
Le Chef du Département des brevets

Martine PLANCHE

BEST AVAILABLE COPY

INSTITUT  
NATIONAL DE  
LA PROPRIÉTÉ  
INDUSTRIELLE

SIEGE  
26 bis, rue de Saint Petersburg  
75800 PARIS Cédex 08  
Téléphone : 01 53 04 53 04  
Télécopie : 01 42 93 59 30

**THIS PAGE BLANK (USPTO)**

**REQUÊTE EN DÉLIVRANCE**

26 bis, rue de Saint Pétersbourg  
75800 Paris Cedex 08  
Téléphone : 01 53 04 53 04 Télécopie : 01 42 93 59 30

Confirmation d'un dépôt par télécopie ☐

Cet imprimé est à remplir à l'encre noire en lettres capitales

<p>DATE DE REMISE DES PIÈCES - 1 OCT. 1999</p> <p>N° D'ENREGISTREMENT NATIONAL 9912467</p> <p>DÉPARTEMENT DE DÉPÔT</p> <p>DATE DE DÉPÔT 01/10/1999</p> <p style="text-align: right;">1. N. P. I. RENNES</p>	<p>1 NOM ET ADRESSE DU DEMANDEUR OU DU MANDATAIRE À OUI LA CORRESPONDANCE DOIT ÊTRE ADRESSÉE</p> <p>Patrice VIDON Cabinet Patrice VIDON Immeuble Germanium 80 avenue des Buttes de Coësmes 35700 RENNES</p>														
<p>2 DEMANDE Nature du titre de propriété industrielle</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> brevet d'invention <input type="checkbox"/> demande divisionnaire</p> <p><input type="checkbox"/> certificat d'utilité <input type="checkbox"/> transformation d'une demande de brevet européen</p> <p style="text-align: center;">demande initiale</p> <p><input type="checkbox"/> brevet d'invention <input type="checkbox"/> certificat d'utilité n°</p> <p>Établissement du rapport de recherche <input type="checkbox"/> différé <input checked="" type="checkbox"/> immédiat</p> <p>Le demandeur, personne physique, requiert le paiement échelonné de la redevance <input type="checkbox"/> oui <input type="checkbox"/> non</p> <p>Titre de l'invention (200 caractères maximum)</p> <p>Procédé, système, dispositif destinés à prouver l'authenticité d'une entité et/ou l'intégrité et/ou l'authenticité d'un message aux moyens de facteurs premiers particuliers.</p>															
<p>3 DEMANDEUR (S) n° SIREN code APE-NAF</p> <p>Nom et prénoms (souligner le nom patronymique) ou dénomination</p> <table style="width:100%;"> <tr> <td style="width:70%;">1. FRANCE TELECOM</td> <td style="width:30%;">Forme juridique</td> </tr> <tr> <td>2. TELEDIFFUSION DE FRANCE</td> <td>Société Anonyme</td> </tr> <tr> <td>3. MATH RIZK</td> <td>Société Anonyme</td> </tr> <tr> <td></td> <td>SPRL (Société de droit belge)</td> </tr> </table> <p>Nationalité (s) Française</p> <p>Adresse (s) complète (s) Pays</p> <table style="width:100%;"> <tr> <td style="width:40%;">1. 6 place d'Alleray 75015 PARIS</td> <td style="width:30%;">3. Verte Voie, 20 - Boîte 5 B-1348 LOUVAIN-LA-NEUVE Belgique</td> <td style="width:30%;">France (1,2) Belgique (3)</td> </tr> <tr> <td>2. 10, rue d'Oradour-sur-Glane 75732 PARIS Cédex 15</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>		1. FRANCE TELECOM	Forme juridique	2. TELEDIFFUSION DE FRANCE	Société Anonyme	3. MATH RIZK	Société Anonyme		SPRL (Société de droit belge)	1. 6 place d'Alleray 75015 PARIS	3. Verte Voie, 20 - Boîte 5 B-1348 LOUVAIN-LA-NEUVE Belgique	France (1,2) Belgique (3)	2. 10, rue d'Oradour-sur-Glane 75732 PARIS Cédex 15		
1. FRANCE TELECOM	Forme juridique														
2. TELEDIFFUSION DE FRANCE	Société Anonyme														
3. MATH RIZK	Société Anonyme														
	SPRL (Société de droit belge)														
1. 6 place d'Alleray 75015 PARIS	3. Verte Voie, 20 - Boîte 5 B-1348 LOUVAIN-LA-NEUVE Belgique	France (1,2) Belgique (3)													
2. 10, rue d'Oradour-sur-Glane 75732 PARIS Cédex 15															
<p>4 INVENTEUR (S) Les inventeurs sont les demandeurs <input type="checkbox"/> oui <input checked="" type="checkbox"/> non Si la réponse est non, fournir une désignation séparée</p>															
<p>5 RÉDUCTION DU TAUX DES REDEVANCES <input type="checkbox"/> requise pour la 1ère fois <input type="checkbox"/> requise antérieurement au dépôt : joindre copie de la décision d'admission</p>															
<p>6 DÉCLARATION DE PRIORITÉ OU REQUÊTE DU BÉNÉFICE DE LA DATE DE DÉPÔT D'UNE DEMANDE ANTÉRIEURE</p> <table style="width:100%;"> <tr> <th>pays d'origine</th> <th>numéro</th> <th>date de dépôt</th> <th>nature de la demande</th> </tr> <tr> <td>France</td> <td>99 01065</td> <td>27 janvier 1999</td> <td></td> </tr> <tr> <td>France</td> <td>99 03770</td> <td>23 mars 1999</td> <td></td> </tr> </table>		pays d'origine	numéro	date de dépôt	nature de la demande	France	99 01065	27 janvier 1999		France	99 03770	23 mars 1999			
pays d'origine	numéro	date de dépôt	nature de la demande												
France	99 01065	27 janvier 1999													
France	99 03770	23 mars 1999													
<p>7 DIVISIONS antérieures à la présente demande n° date n° date</p>															
<p>8 SIGNATURE DU DEMANDEUR OU DU MANDATAIRE (nom et qualité du signataire)</p> <p>P. VIDON (CPI 991250)</p>															
<p>SIGNATURE DU PRÉPOSÉ À LA RÉCEPTION SIGNATURE APRÈS ENREGISTREMENT DE LA DEMANDE À L'INPI</p> <p><i>[Signature]</i></p>															

DÉSIGNATION DE L'INVENTEUR

(si le demandeur n'est pas l'inventeur ou l'unique inventeur)

DEPARTEMENT DES BREVETS

26bis, rue de Saint-Petersbourg  
75800 Paris Cédex 08

Tél. : 01 53 04 53 04 - Télécopie : 01 42 93 59 30

N° D'ENREGISTREMENT NATIONAL

99 12 467

TITRE DE L'INVENTION :

**Procédé, système, dispositif destinés à prouver l'authenticité d'une entité et/ou l'intégrité et/ou l'authenticité d'un message aux moyens de facteurs premiers particuliers.**

LE(S) SOUSSIGNÉ(S)

Patrice VIDON  
Cabinet Patrice VIDON  
Immeuble Germanium  
80 avenue des Buttes de Coësmes  
35700 RENNES

DÉSIGNE(NT) EN TANT QU'INVENTEUR(S) (indiquer nom, prénoms, adresse et souligner le nom patronymique) :

M. Louis GUILLLOU  
16 rue de l'Ise  
35230 BOURGBARRE  
FRANCE

M. Jean-Jacques QUISQUATER  
3 avenue des canards  
B-1640 Rhode Saint Genèse  
BELGIQUE

NOTA : A titre exceptionnel, le nom de l'inventeur peut être suivi de celui de la société à laquelle il appartient (société d'appartenance) lorsque celle-ci est différente de la société déposante ou titulaire.

Date et signature (s) du (des) demandeur (s) ou du mandataire

le 1<sup>er</sup> octobre 1999  
P. VIDON (CPI 92-1250)

# DOCUMENT COMPORTANT DES MODIFICATIONS

PAGE(S) DE LA DESCRIPTION OU DES REVENDEICATIONS OU PLANCHE(S) DE DESSIN			R.M.*	DATE DE LA CORRESPONDANCE	TAMPON DATEUR DU CORRECTEUR
Modifiée(s)	Supprimée(s)	Ajoutée(s)			
11 17, 20, 34			NON	6 DEC 99	23 A J P
		1/4 à 4/4	NON	6 DEC 99	23 DEC. 1999 A J P

Un changement apporté à la rédaction des revendications d'origine, sauf si celui-ci découle des dispositions de l'article R.612-36 du code de la Propriété Intellectuelle, est signalé par la mention «R.M.» (revendications modifiées).

Procédé, système, dispositif destinés à prouver l'authenticité d'une entité et/ou l'intégrité et/ou l'authenticité d'un message aux moyens de facteurs premiers particuliers.

La présente invention concerne le domaine technique des procédés, des systèmes ainsi que des dispositifs destinés à prouver l'authenticité d'une entité et/ou l'intégrité et/ou l'authenticité d'un message.

Le brevet EP 0 311 470 B1 dont les inventeurs sont Louis Guillou et Jean-Jacques Quisquater décrit un tel procédé. On y fera ci-après référence en le désignant par les termes : "brevet GQ" ou "procédé GQ". Par la suite on désignera parfois par "GQ2", "invention GQ2" ou "technologie GQ2" de nouveaux développements de la technologie GQ faisant l'objet des demandes pendantes déposées le même jour que la présente demande par France Télécom, TDF et la Société Mathrizk et ayant pour inventeur Louis Guillou et Jean-Jacques Quisquater. Les traits caractéristiques de ces demandes pendantes sont rappelés chaque fois que cela est nécessaire dans la description qui suit.

Selon le procédé GQ, une entité appelée "autorité de confiance" attribue une identité à chaque entité appelée "témoin" et en calcule la signature RSA; durant un processus de personnalisation, l'autorité de confiance donne identité et signature au témoin. Par la suite, le témoin proclame : "*Voici mon identité ; j'en connais la signature RSA.*" Le témoin prouve sans la révéler qu'il connaît la signature RSA de son identité. Grâce à la clé publique de vérification RSA distribuée par l'autorité de confiance, une entité appelée "contrôleur" vérifie sans en prendre connaissance que la signature RSA correspond à l'identité proclamée. Les mécanismes utilisant le procédé GQ se déroulent "sans transfert de connaissance". Selon le procédé GQ, le témoin ne connaît pas la clé privée RSA avec laquelle l'autorité de confiance signe un grand nombre d'identités.

La technologie GQ précédemment décrite fait appel à la technologie RSA.

Mais si la technologie RSA dépend bel et bien de la factorisation du module  $n$ , cette dépendance n'est pas une équivalence, loin s'en faut, comme le démontrent les attaques dites "multiplicatives" contre les diverses normes de signature numérique mettant en oeuvre la technologie RSA.

L'objectif de la technologie GQ2 est double : d'une part, améliorer les performances par rapport à la technologie RSA ; d'autre part, éviter les problèmes inhérents à la technologie RSA. La connaissance de la clé privée GQ2 est équivalente à la connaissance de la factorisation du module  $n$ . Toute attaque au niveau des triplets GQ2 se ramène à la factorisation du module  $n$  : il y a cette fois équivalence. Avec la technologie GQ2, la charge de travail est réduite, tant pour l'entité qui signe ou qui s'authentifie que pour celle qui contrôle. Grâce à un meilleur usage du problème de la factorisation, tant en sécurité qu'en performance, la technologie GQ2 évite les inconvénients présentés par la technologie RSA.

Le procédé GQ met en oeuvre des calculs modulo des nombres de 512 bits ou davantage. Ces calculs concernent des nombres ayant sensiblement la même taille élevés à des puissances de l'ordre de  $2^{16} + 1$ . Or les infrastructures microélectroniques existantes, notamment dans le domaine des cartes bancaires, font usage de microprocesseurs auto-programmables monolithiques dépourvus de coprocesseurs arithmétiques. La charge de travail liée aux multiples opérations arithmétiques impliquées par des procédés tels que le procédé GQ, entraîne des temps de calcul qui dans certains cas s'avèrent pénalisant pour les consommateurs utilisant des cartes bancaires pour acquitter leurs achats. Il est rappelé ici, qu'en cherchant à accroître la sécurité des cartes de paiement, les autorités bancaires posent un problème particulièrement délicat à résoudre. En effet, il faut traiter deux questions apparemment contradictoires : augmenter la sécurité en utilisant des clés de plus en plus longues et distinctes pour

chaque carte tout en évitant que la charge de travail n'entraîne des temps de calcul prohibitifs pour les utilisateurs. Ce problème prend un relief particulier dans la mesure où, en outre, il convient de tenir compte de l'infrastructure en place et des composants microprocesseurs existants.

5 La technologie GQ2 apporte une solution à ce problème tout en renforçant la sécurité.

La technologie GQ2 met en oeuvre des facteurs premiers ayant des propriétés particulières. Différentes techniques existent pour produire ces facteurs premiers. La présente invention a pour objet un procédé  
10 permettant de produire de manière systématique de tels facteurs premiers. Elle concerne aussi l'application qui peut être faite de ceux-ci plus particulièrement dans la mise en oeuvre de la technologie GQ2. On souligne dès à présent que ces facteurs premiers particuliers et le procédé permettant de les obtenir sont susceptibles d'application en dehors du  
15 champ de la technologie GQ2.

L'invention s'applique à un procédé (procédé GQ2) destiné à prouver à une entité contrôleur,

- l'authenticité d'une entité et/ou
- l'intégrité d'un message M associé à cette entité.

20 Cette preuve est établie au moyen de tout ou partie des paramètres suivants ou dérivés de ceux-ci:

- un module public  $n$  constitué par le produit de  $f$  facteurs premiers  $p_1, p_2, \dots, p_f$  ( $f$  étant supérieur ou égal à 2),
- un exposant public  $v$  ;
- 25 -  $m$  nombres de base  $g_1, g_2, \dots, g_m$  entiers, distincts, ( $m$  étant supérieur ou égal à 1).

Les nombres de base  $g_i$  sont tels que les deux équations (1) et (2) :

$$x^2 \equiv g_i \pmod{n} \quad \text{et} \quad x^2 \equiv -g_i \pmod{n}$$

n'ont pas de solution en  $x$  dans l'anneau des entiers modulo  $n$ ,

et tel que l'équation (3) :

$$x^v \equiv g_i^2 \pmod{n}$$

a des solutions en  $x$  dans l'anneau des entiers modulo  $n$ .

Le procédé selon l'invention permet de produire les  $f$  facteurs premiers  $p_1, p_2, \dots, p_f$  de telle sorte que les équations (1), (2) et (3) soient satisfaites. Le procédé selon l'invention comprend l'étape de choisir en premier :

- les  $m$  nombres de base  $g_1, g_2, \dots, g_m$ ,
- la taille du module  $n$ ,
- la taille des  $f$  facteurs premiers  $p_1, p_2, \dots, p_f$ .

Le procédé concerne le cas où l'exposant public  $v$  est de la forme :

$$v = 2^k$$

où  $k$  est un paramètre de sécurité plus grand que 1. On choisit également en premier le paramètre de sécurité  $k$ . Cette valeur particulière de l'exposant  $v$  est un des traits essentiels de la technologie GQ2.

De préférence, les  $m$  nombres de base  $g_1, g_2, \dots, g_m$ , sont choisis au moins en partie parmi les premiers nombres entiers. De préférence également, le paramètre de sécurité  $k$  est un petit nombre entier, notamment inférieur à 100. Avantageusement, la taille du module  $n$  est supérieure à plusieurs centaines de bits. Avantageusement également, les  $f$  facteurs premiers  $p_1, p_2, \dots, p_f$  ont une taille voisine de la taille du module  $n$  divisé par le nombre  $f$  de facteurs.

Selon une caractéristique importante du procédé selon l'invention, les  $f$  facteurs premiers  $p_1, p_2, \dots, p_f$  ne sont pas choisis de manière quelconque. Parmi les  $f$  facteurs premiers  $p_1, p_2, \dots, p_f$  un certain nombre d'entre eux :  $e$  seront choisis congrus à 1 modulo 4. Ce nombre  $e$  de facteurs premiers peut être nul. Dans le cas où  $e$  est nul le module  $n$  sera ci-après qualifié de module basique, dans le cas où  $e > 0$  le module  $n$  sera ci-après qualifié de module mixte. Les  $f-e$  autres facteurs premiers sont choisis congrus à 3 modulo 4. Ce nombre  $f-e$  de facteurs premiers est au moins égal à 2.

### Choix des f-e facteurs premiers congrus à 3 modulo 4

Pour produire les f-e facteurs premiers  $p_1, p_2, \dots, p_{f-e}$  congrus à 3 modulo 4, on met en oeuvre les étapes suivantes :

- on choisit le premier facteur premier  $p_1$  congru à 3 modulo 4 puis,
- on choisit le deuxième facteur premier  $p_2$  tel que  $p_2$  soit complémentaire de  $p_1$  par rapport au nombre de base  $g_1$ .

Pour choisir le facteur  $p_{i+1}$ , on procède comme suit en distinguant deux cas:

(1) Cas où  $i > m$

Dans le cas où  $i > m$ , on choisit le facteur  $p_{i+1}$  congru à 3 modulo 4.

(2) Cas où  $i \leq m$

Dans ce cas où  $i \leq m$ , on calcule le profil ( $\text{Profil}_i(g_i)$ ) de  $g_i$  par rapport aux  $i$  premiers facteurs premiers  $p_1, \dots, p_i$ .

• si le  $\text{Profil}_i(g_i)$  est plat, on choisit le facteur  $p_{i+1}$  tel que  $p_{i+1}$  soit complémentaire de  $p_i$  par rapport à  $g_i$ .

• sinon, on choisit parmi les  $i-1$  nombres de bases  $g_1, g_2, \dots, g_{i-1}$  et toutes leurs combinaisons multiplicatives le nombre, ci-après dénommé  $g$ , tel que  $\text{Profil}_i(g) = \text{Profil}_i(g_i)$ , on choisit ensuite  $p_{i+1}$  tel que  $\text{Profil}_{i+1}(g_i) \neq \text{Profil}_{i+1}(g)$ .

Les expressions "complémentaire", "profil", "profil plat" ont le sens défini dans la description.

Pour choisir le dernier facteur premier  $p_{f-e}$  on procède comme suit, en distinguant trois cas :

(1) Cas où  $f-e-1 > m$

Dans le cas où  $f-e-1 > m$ , on choisit  $p_{f-e}$  congru à 3 modulo 4.

(2) Cas où  $f-e-1 = m$

Dans le cas où  $f-e-1 = m$ , on calcule  $\text{Profil}_{f-e-1}(g_m)$  par rapport aux  $f-e-1$  premiers facteurs premiers, de  $p_1$  à  $p_{f-e-1}$ .

• si  $\text{Profil}_{f-e-1}(g_m)$  est plat, on choisit  $p_{f-e-1}$  tel qu'il soit

complémentaire de  $p_1$  par rapport à  $g_m$ ,

• sinon, on procède comme il est ci-après stipulé.

On choisit parmi les  $m-1$  nombres de bases de  $g_1$  à  $g_{m-1}$  et toutes leurs combinaisons multiplicatives le nombre, ci-après dénommé  $g$ , tel que  $\text{Profil}_i(g) = \text{Profil}_i(g_i)$  puis, on choisit ensuite  $p_{f-e}$  tel que  $\text{Profil}_{f-e}(g) \neq \text{Profil}_{f-e}(g_m)$ .

(3) Cas où  $f-e-1 < m$

Dans le cas où  $f-e-1 < m$ , on choisit  $p_{f-e}$  tel que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

(3.1) Première condition.

On calcule  $\text{Profil}_{f-e-1}(g_{f-e-1})$  par rapport aux  $f-e-1$  premiers facteurs premiers, de  $p_1$  à  $p_{f-e-1}$ . Deux cas sont alors à considérer. Selon l'un ou l'autre de ces deux cas, la première condition sera différente.

Si  $\text{Profil}_{f-e-1}(g_{f-e-1})$  est plat, on choisit  $p_{f-e}$  tel qu'il satisfasse à la première condition d'être complémentaire de  $p_1$  par rapport à  $g_{f-e-1}$  (première condition selon le premier cas) sinon, on choisit parmi les  $f-e-1$  nombres de bases de  $g_1$  à  $g_{m-1}$  et toutes leurs combinaisons multiplicatives le nombre, ci-après dénommé  $g$ , tel que  $\text{Profil}_i(g) = \text{Profil}_{f-e-1}(g_{f-e-1})$  puis, on choisit ensuite  $p_{f-e}$  tel qu'il satisfasse à la condition d'être tel que  $\text{Profil}_{f-e}(g) \neq \text{Profil}_{f-e}(g_m)$ , (première condition selon le deuxième cas)

(3.2) Deuxième condition

On sélectionne parmi l'ensemble des derniers nombres de bases de  $g_{f-e}$  à  $g_m$  ceux dont le profil  $\text{Profil}_{f-e-1}(g_i)$  est plat puis, on choisit  $p_{f-e}$  tel qu'il satisfasse à la condition d'être complémentaire de  $p_1$  par rapport à chacun des nombres de bases ainsi sélectionnés (deuxième condition).

**Choix des  $e$  facteurs premiers congrus à 1 modulo 4**

Pour produire les  $e$  facteurs premiers congrus à 1 modulo 4, on évalue chaque candidat facteur premier  $p$ , de  $p_{f-e}$  à  $p_f$ , en lui faisant subir les deux tests successifs suivants.

## (1) Premier test

On calcule le symbole de Legendre de chaque nombre de base  $g_i$ , de  $g_1$  à  $g_m$ , par rapport au facteur premier  $p$  candidat,

• si le symbole de Legendre est égal à  $-1$ , on rejette le candidat  $p$ ,

5      • si le symbole de Legendre est égal à  $+1$ , on poursuit l'évaluation du candidat  $p$  en passant au nombre de base suivant puis, lorsque le dernier nombre de base a été pris en compte on passe au deuxième test,

## (2) Deuxième test,

10      On calcule un nombre entier  $t$  tel que  $p-1$  est divisible par  $2^t$  mais pas par  $2^{t+1}$  puis, on calcule un entier  $s$  tel que  $s = (p-1+2^t)/2^{t+1}$ .

On applique la clé  $\langle s, p \rangle$  à chaque valeur publique  $G_i$  pour obtenir un résultat  $r_i$ .

$$r \equiv G_i^s \pmod{p}$$

15      Si  $r$  est égal à  $g_1$  ou  $-g_1$ , on poursuit le deuxième test en passant à la valeur publique  $G_{i+1}$  suivante.

Si  $r$  est différent de  $g_1$  ou  $-g_1$ , on calcule un facteur  $u$  en appliquant l'algorithme ci-après spécifié pour un indice  $i$  allant de 1 à  $t-2$ . L'algorithme met en oeuvre deux variables :  $w$  initialisée par  $r$  et  $jj = 2^u$  prenant des valeurs allant de 2 à  $2^{t-2}$ , ainsi qu'un nombre  $b$  obtenu par  
20      l'application de la clé  $\langle (p-1)/2^t, p \rangle$  à un résidu non quadratique de  $CG(p)$ . L'algorithme consiste à répéter autant que nécessaire, la séquence suivante:

• Etape 1 : on calcule  $w^2/G_i \pmod{p}$ .

25      • Etape 2 : on élève le résultat à la puissance  $2^{t-ii-1}$ . Deux cas sont à considérer.

## Premier cas

Si on obtient  $+1$ , on passe à la valeur publique  $G_{i+1}$  suivante et on poursuit le deuxième test pour cette valeur publique.

## Deuxième cas.

Si on obtient -1, on calcule  $jj = 2^{ii}$  puis, on remplace  $w$  par  $w.b^{jj} \pmod{p}$ .  
Ensuite, on poursuit l'algorithme pour la valeur suivante de l'indice  $ii$ .

A l'issue de l'algorithme, la valeur figurant dans la variable  $jj$  permet de  
calculer un nombre entier  $u$  par la relation  $jj = 2^{t-u}$  puis, on calcule  
l'expression  $t-u$ . Deux cas se présentent :

- si  $t-u < k$ , on rejette le candidat  $p$
- si  $t-u \geq k$ , on continue l'évaluation du candidat  $p$  en passant à la  
valeur publique  $G_{i+1}$  suivante puis, en poursuivant le deuxième test.

Le candidat  $p$  est accepté comme facteur premier congru à 1 modulo 4 si à  
l'issue du deuxième test, pour toutes les  $m$  valeurs publiques  $G_i$ , il n'a pas  
été rejeté.

#### Application aux valeurs publiques et privées de GQ2

La présente invention concerne également un procédé (procédé GQ2)  
faisant application du procédé qui vient d'être décrit et qui permet,  
rappelons le, de produire  $f$  facteurs premiers  $p_1, p_2, \dots, p_f$  ayant des  
propriétés particulières. Le procédé faisant application du procédé qui  
vient d'être décrit est destiné à prouver à une entité contrôleur,

- l'authenticité d'une entité et/ou
- l'intégrité d'un message  $M$  associé à cette entité,

Cette preuve est établie au moyen de tout ou partie des paramètres  
suivants ou dérivés de ceux-ci:

- $m$  couples de valeurs privées  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  et publiques  $G_1, G_2, \dots, G_m$  ( $m$  étant supérieur ou égal à 1),
- le module public  $n$  constitué par le produit desdits  $f$  facteurs premiers  
 $p_1, p_2, \dots, p_f$  ( $f$  étant supérieur ou égal à 2),
- l'exposant public  $v$ .

Ledit module, ledit exposant et lesdites valeurs sont liés par des relations  
du type :

$$G_i \cdot Q_i^v \equiv 1 \pmod{n} \text{ ou } G_i \equiv Q_i^v \pmod{n}.$$

Ledit exposant  $v$  est tel que

$$v = 2^k$$

où  $k$  est un paramètre de sécurité plus grand que 1 .

Ladite valeur publique  $G_i$  est le carré  $g_i^2$  du nombre de base  $g_i$  inférieur aux  $f$  facteurs premiers  $p_1, p_2, \dots, p_f$ . Le nombre de base  $g_i$  est tel que les deux équations :

$$x^2 \equiv g_i \pmod{n} \quad \text{et} \quad x^2 \equiv -g_i \pmod{n}$$

n'ont pas de solution en  $x$  dans l'anneau des entiers modulo  $n$  et tel que l'équation :

$$x^v \equiv g_i^2 \pmod{n}$$

a des solutions en  $x$  dans l'anneau des entiers modulo  $n$ .

Ledit procédé met en œuvre selon les étapes suivantes une entité appelée témoin. Ladite entité témoin dispose des  $f$  facteurs premiers  $p_i$  et/ou des paramètres des restes chinois des facteurs premiers et/ou du module public  $n$  et/ou des  $m$  valeurs privées  $Q_i$  et/ou des  $f.m$  composantes  $Q_{i,j}$  ( $Q_{i,j} \equiv Q_i \pmod{p_j}$ ) des valeurs privées  $Q_i$  et de l'exposant public  $v$ .

Le témoin calcule des engagements  $R$  dans l'anneau des entiers modulo  $n$ . Chaque engagement est calculé :

- soit en effectuant des opérations du type

$$R \equiv r^v \pmod{n}$$

où  $r$  est un aléa tel que  $0 < r < n$ ,

- soit en effectuant des opérations du type

$$R_i \equiv r_i^v \pmod{p_i}$$

où  $r_i$  est un aléa associé au nombre premier  $p_i$  tel que  $0 < r_i < p_i$ , chaque  $r_i$  appartenant à une collection d'aléas  $\{r_1, r_2, \dots, r_f\}$ , puis en appliquant la méthode des restes chinois.

Le témoin reçoit un ou plusieurs défis  $d$ . Chaque défi  $d$  comportant  $m$  entiers  $d_i$  ci-après appelés défis élémentaires. Le témoin calcule à partir de chaque défi  $d$  une réponse  $D$ ,

- soit en effectuant des opérations du type :

$$D \equiv r \cdot Q_1^{d_1} \cdot Q_2^{d_2} \cdot \dots \cdot Q_m^{d_m} \pmod{n}$$

- soit en effectuant des opérations du type :

$$D_i \equiv r_i \cdot Q_{i,1}^{d_1} \cdot Q_{i,2}^{d_2} \cdot \dots \cdot Q_{i,m}^{d_m} \pmod{p_i}$$

5 puis, en appliquant la méthode des restes chinois.

Le procédé est tel qu'il y a autant de réponses  $D$  que de défis  $d$  que d'engagements  $R$ , chaque groupe de nombres  $R, d, D$  constituant un triplet noté  $\{R, d, D\}$ .

10 De préférence, pour mettre en oeuvre, comme il vient d'être décrit, les couples de valeurs privées  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  et publiques  $G_1, G_2, \dots, G_m$ , on utilise les facteurs premiers  $p_1, p_2, \dots, p_r$  et/ou les paramètres des restes chinois, les nombres de bases  $g_1, g_2, \dots, g_m$  et/ou les valeurs publiques  $G_1, G_2, \dots, G_m$  pour calculer :

15 - soit les valeurs privées  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  en extrayant une  $k$  ième racine carrée modulo  $n$  de  $G_i$ , ou en prenant l'inverse d'une  $k$  ième racine carrée modulo  $n$  de  $G_i$ ,

- soit les  $f.m$  composantes privées  $Q_{i,j}$  des valeurs privées  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ , telles que  $Q_{i,j} \equiv Q_i \pmod{p_j}$ ,

20 Plus particulièrement, pour calculer les  $f.m$  composantes privées  $Q_{i,j}$  des valeurs privées  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  :

- on applique la clé  $\langle s, p_j \rangle$  pour calculer  $z$  tel que

$$z \equiv G_i^s \pmod{p_j}$$

- et on utilise les valeurs  $t$  et  $u$ .

25 Les valeurs  $t$  et  $u$  sont calculées comme il a été indiqué ci-dessus dans le cas où  $p_j$  est congru à 1 modulo 4. Les valeurs  $t$  et  $u$  sont prises respectivement égales à 1 ( $t=1$ ) et 0 ( $u=0$ ) dans le cas où  $p_j$  est congru à 3 modulo 4.

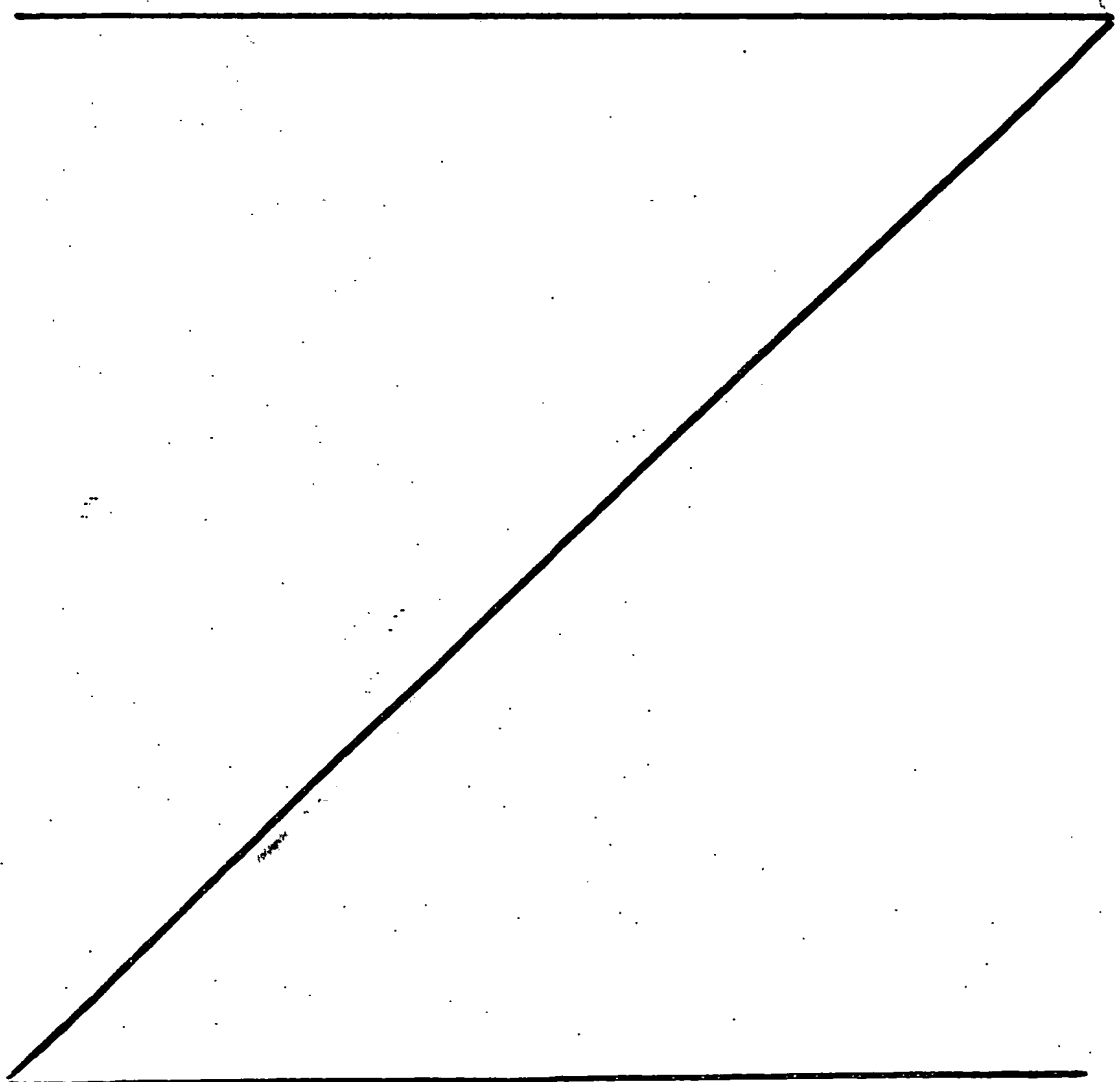
Si la valeur  $u$  est nul, on considère l'ensemble des nombres  $zz$  tels que :

• • •  $zz$  soit égale à  $z$  ou tel que

...  $zz$  soit égale au produit (mod  $p_j$ ) de  $z$  par chacune des  $2^{i-1}$  racines  $2^i$  ièmes primitives de l'unité,  $i$  allant de 1 à  $\min(k, t)$ .

Si  $u$  est positif, on considère l'ensemble des nombres  $zz$  tels que  $zz$  soit égale au produit (mod  $p_j$ ) de  $z$  par chacune des  $2^k$  racines  $2^k$  ièmes de l'unité,  $z$  désignant la valeur de la variable  $w$  à l'issue de l'algorithme ci-dessus décrit.

On en déduit au moins une valeur de la composante  $Q_{1,j}$ . Elle est égale à  $zz$  lorsque l'équation  $G_1 \equiv Q_1^v \pmod{n}$  est utilisée ou bien elle est égale à l'inverse de  $zz$  modulo  $p_j$  de  $zz$  lorsque l'équation  $G_1 \cdot Q_1^v \equiv 1 \pmod{n}$  est utilisée.



### Description

Rappelons l'objectif de la technologie GQ : l'authentification dynamique d'entités et de messages associés, ainsi que la signature numérique de messages.

5 La version classique de la technologie GQ fait appel à la technologie RSA. Mais, si la technologie RSA dépend bel et bien de la factorisation, cette dépendance n'est pas une équivalence, loin s'en faut, comme le démontrent les attaques dites « multiplicatives » contre diverses normes de signature numérique mettant en œuvre la technologie RSA.

10 Dans le cadre de la technologie GQ2, la présente partie de l'invention porte plus précisément sur la production des jeux de clés GQ2 destinés à assurer l'authentification dynamique et la signature numérique. La technologie GQ2 ne fait pas appel à la technologie RSA. L'objectif est double : d'une part, améliorer les performances par rapport à la technologie RSA ; d'autre  
15 part, éviter les problèmes inhérents à la technologie RSA. La clé privée GQ2 est la factorisation du module  $n$ . Toute attaque au niveau des triplets GQ2 se ramène à la factorisation du module  $n$  : il y a cette fois équivalence. Avec la technologie GQ2, la charge de travail est réduite, tant pour l'entité qui signe ou qui s'authentifie que pour celle qui contrôle. Grâce à un  
20 meilleur usage du problème de la factorisation, tant en sécurité qu'en performance, la technologie GQ2 concurrence la technologie RSA.

La technologie GQ2 utilise un ou plusieurs petits nombres entiers plus grands que 1, disons  $m$  petits nombres entiers ( $m \geq 1$ ) appelés « nombres de base » et notés par  $g_i$ . Puis, on choisit une clé publique de vérification  $\langle v, n \rangle$   
25 de la manière suivante. L'exposant public de vérification  $v$  est  $2^k$  où  $k$  est un petit nombre entier plus grand que 1 ( $k \geq 2$ ). Le module public  $n$  est le produit d'au moins deux facteurs premiers plus grands que les nombres de base, disons  $f$  facteurs premiers ( $f \geq 2$ ) notés par  $p_i$  de  $p_1 \dots p_f$ . Les  $f$  facteurs premiers sont choisis de façon à ce que le module public  $n$  ait les propriétés

suivantes par rapport à chacun des  $m$  nombres de base de  $g_1$  à  $g_m$ .

- D'une part, les équations (1) et (2) n'ont pas de solution en  $x$  dans l'anneau des entiers modulo  $n$ , c'est-à-dire que  $g_i$  et  $-g_i$  sont deux résidus non quadratiques (mod  $n$ ).

5

$$x^2 \equiv g_i \pmod{n} \quad (1)$$

$$x^2 \equiv -g_i \pmod{n} \quad (2)$$

- D'autre part, l'équation (3) a des solutions en  $x$  dans l'anneau des entiers modulo  $n$ .

$$x^{2^k} \equiv g_i^2 \pmod{n} \quad (3)$$

10

Par la suite, ces propriétés sont encore appelées les principes GQ2.

La clé publique de vérification  $\langle v, n \rangle$  étant fixée selon les nombres de base de  $g_1$  à  $g_m$  avec  $m \geq 1$ , chaque nombre de base  $g_i$  détermine un couple de valeurs GQ2 comprenant une valeur publique  $G_i$  et une valeur privée  $Q_i$ : soit  $m$  couples notés de  $G_1, Q_1$  à  $G_m, Q_m$ . La valeur publique  $G_i$  est le carré du nombre de base  $g_i$ : soit  $G_i = g_i^2$ . La valeur privée  $Q_i$  est une des solutions à l'équation (3) ou bien l'inverse (mod  $n$ ) d'une telle solution.

15

De même que le module  $n$  se décompose en  $f$  facteurs premiers, l'anneau des entiers modulo  $n$  se décompose en  $f$  corps de Galois, de  $CG(p_1)$  à  $CG(p_f)$ . Voici les projections des équations (1), (2) et (3) dans  $CG(p_j)$ .

20

$$x^2 \equiv g_i \pmod{p_j} \quad (1.a)$$

$$x^2 \equiv -g_i \pmod{p_j} \quad (2.a)$$

$$x^{2^k} \equiv g_i^2 \pmod{p_j} \quad (3.a)$$

25

Chaque valeur privée  $Q_i$  peut se représenter de manière unique par  $f$  composantes privées, une par facteur premier:  $Q_{i,j} \equiv Q_i \pmod{p_j}$ . Chaque composante privée  $Q_{i,j}$  est une solution à l'équation (3.a) ou bien l'inverse (mod  $p_j$ ) d'une telle solution. Après que toutes les solutions possibles à chaque équation (3.a) aient été calculées, la technique des restes chinois permet d'établir toutes les valeurs possibles pour chaque valeur privée  $Q_i$  à partir de  $f$  composantes de  $Q_{i,1}$  à  $Q_{i,f}$ :  $Q_i = \text{Restes Chinois}(Q_{i,1}, Q_{i,2}, \dots, Q_{i,f})$

de manière à obtenir toutes les solutions possibles à l'équation (3).

Voici la technique des restes chinois : soient deux nombres entiers positifs premiers entre eux  $a$  et  $b$  tels que  $0 < a < b$ , et deux composantes  $X_a$  de 0 à  $a-1$  et  $X_b$  de 0 à  $b-1$  ; il s'agit de déterminer  $X = \text{Restes Chinois } (X_a, X_b)$ , c'est-à-dire, le nombre unique  $X$  de 0 à  $a.b-1$  tel que  $X_a \equiv X \pmod{a}$  et  $X_b \equiv X \pmod{b}$ . Voici le paramètre des restes chinois :  $\alpha \equiv \{b \pmod{a}\}^{-1} \pmod{a}$ . Voici l'opération des restes chinois :  $\epsilon \equiv X_b \pmod{a}$  ;  $\delta = X_a - \epsilon$  ; si  $\delta$  est négatif, remplacer  $\delta$  par  $\delta+a$  ;  $\gamma \equiv \alpha \cdot \delta \pmod{a}$  ;  $X = \gamma \cdot b + X_b$ .

Lorsque les facteurs premiers sont rangés dans l'ordre croissant, du plus petit  $p_1$  au plus grand  $p_f$ , les paramètres des restes chinois peuvent être les suivants (il y en a  $f-1$ , c'est-à-dire, un de moins que de facteurs premiers). Le premier paramètre des restes chinois est  $\alpha \equiv \{p_2 \pmod{p_1}\}^{-1} \pmod{p_1}$ . Le second paramètre des restes chinois est  $\beta \equiv \{p_1.p_2 \pmod{p_3}\}^{-1} \pmod{p_3}$ . Le  $i$ ème paramètre des restes chinois est  $\lambda \equiv \{p_1.p_2 \dots p_{i-1} \pmod{p_i}\}^{-1} \pmod{p_i}$ . Et ainsi de suite. Ensuite, en  $f-1$  opérations des restes chinois, on établit un premier résultat  $(\text{mod } p_2 \text{ fois } p_1)$  avec le premier paramètre, puis, un second résultat  $(\text{mod } p_1.p_2 \text{ fois } p_3)$  avec le second paramètre, et ainsi de suite, jusqu'à un résultat  $(\text{mod } p_1 \dots p_{f-1} \text{ fois } p_f)$ , c'est-à-dire,  $(\text{mod } n)$ .

L'objet de l'invention est une méthode pour produire au hasard n'importe quel jeu de clés GQ2 parmi tous les jeux possibles, à savoir :

- produire au hasard n'importe quel module parmi tous les modules GQ2 possibles, c'est-à-dire, les modules assurant que, pour chacun des  $m$  nombres de base  $g_r$ , les équations (1) et (2) n'ont pas de solution en  $x$  dans l'anneau des entiers modulo  $n$  alors que l'équation (3) en a.
- calculer toutes les solutions possibles à chacune des équations (3.a). La technique des restes chinois permet ensuite d'obtenir une valeur privée  $Q_i$  à partir de chaque jeu de  $f$  composantes de  $Q_{i,1}$  à  $Q_{i,f}$  de manière à obtenir n'importe quelle solution en  $x$  à l'équation (3) parmi toutes les solutions possibles.

$$Q_i = \text{Restes Chinois } (Q_{i,1}, Q_{i,2}, \dots, Q_{i,p})$$

Pour appréhender le problème, puis, comprendre la solution que nous donnons au problème, c'est-à-dire, l'invention, nous analysons tout d'abord l'applicabilité des principes de la technologie GQ2. Commençons par rappeler la notion de rang dans un corps de Galois  $CG(p)$  afin d'étudier les fonctions « élever au carré dans  $CG(p)$  » et « prendre une racine carrée d'un résidu quadratique dans  $CG(p)$  ». Puis, analysons l'existence et le nombre de solutions en  $x$  dans  $CG(p)$  aux équations (1.a), (2.a) et (3.a).

### Rang des éléments dans $CG(p)$

Soit un nombre premier impair  $p$  et un nombre entier positif  $a$  plus petit que  $p$ . Définissons la suite  $\{X\}$ .

$$\{X\} \equiv \{x_1 = a; \text{ puis, pour } i \geq 1, x_{i+1} \equiv a \cdot x_i \pmod{p}\}$$

Calculons le terme pour l'indice  $i+p$  et utilisons le théorème de Fermat.

$$x_{i+p} \equiv a^p x_i \equiv a x_i \equiv x_{i+1} \pmod{p}$$

Par conséquent, la période de la suite  $\{X\}$  est  $p-1$  ou un diviseur de  $p-1$ . Cette période dépend de la valeur de  $a$ . Par définition, cette période est appelée « le rang de  $a \pmod{p}$  ». C'est l'indice d'apparition de l'unité dans la suite  $\{X\}$ .

$$x_{rang(a,p)} \equiv 1 \pmod{p}$$

Par exemple, lorsque  $(p-1)/2$  est un nombre premier impair  $p'$ , le corps de Galois  $CG(p)$  comporte un seul élément de rang 1 : c'est 1, un seul élément de rang 2 : c'est  $-1$ ,  $p'-1$  éléments de rang  $p'$ ,  $p'-1$  éléments de rang  $2.p'$ , c'est-à-dire, de rang  $p-1$ .

Les éléments de  $CG(p)$  ayant pour rang  $p-1$  sont appelés les éléments « primitifs » ou encore, « générateurs » de  $CG(p)$ . La dénomination est due au fait que leurs puissances successives dans  $CG(p)$ , c'est-à-dire, les termes de la suite  $\{X\}$  pour les indices allant de 1 à  $p-1$ , forment une permutation de tous les éléments non nuls de  $CG(p)$ .

Soit un élément primitif  $y$  de  $CG(p)$ . Evaluons le rang de l'élément  $y'$

(mod  $p$ ) en fonction de  $i$  et de  $p-1$ . Lorsque  $i$  est premier avec  $p-1$ , c'est  $p-1$ . Lorsque  $i$  divise  $p-1$ , c'est  $(p-1)/i$ . Dans tous les cas, c'est  $(p-1)/\text{pgcd}(p-1, i)$ .

La fonction d'Euler est notée par  $\varphi$ . Par définition,  $n$  étant un nombre entier positif,  $\varphi(n)$  est le nombre de nombres entiers positifs, plus petits que  $n$  et premiers avec  $n$ . Dans le corps  $\text{CG}(p)$ , il y a donc  $\varphi(p-1)$  éléments primitifs.

A titre d'illustration, voici la base de la technologie RSA. Le module public  $n$  est le produit de  $f$  facteurs premiers, de  $p_1$  à  $p_f$  avec  $f \geq 2$ , tel que pour chaque facteur premier  $p_j$ , l'exposant public  $v$  est premier avec  $p_j-1$ . La clé  $\langle v, p \rangle$  respecte le rang des éléments de  $\text{CG}(p)$  : elle les permute. La permutation inverse s'obtient par une clé  $\langle s, p \rangle$  telle que  $p_j-1$  divise  $v.s_j-1$ .

Carrés et racines carrées dans  $\text{CG}(p)$

Les éléments  $x$  et  $p-x$  ont le même carré dans  $\text{CG}(p)$ . La clé  $\langle 2, p \rangle$  ne permute pas les éléments de  $\text{CG}(p)$  parce que  $p-1$  est pair. Pour chaque nombre premier  $p$ , définissons un nombre entier  $t$  de la manière suivante :  $p-1$  est divisible par  $2^t$ , mais pas par  $2^{t+1}$ , c'est-à-dire que  $p$  est congru à  $2^{t+1} \pmod{2^{t+1}}$ . Par exemple,  $t=1$  lorsque  $p$  est congru à 3 (mod 4) ;  $t=2$  lorsque  $p$  est congru à 5 (mod 8) ;  $t=3$  lorsque  $p$  est congru à 9 (mod 16) ;  $t=4$  lorsque  $p$  est congru à 17 (mod 32) ; et ainsi de suite. Chaque nombre premier impair figure dans une et une seule catégorie :  $p$  figure dans la  $t$  ième catégorie. En pratique, si l'on considère un assez grand nombre de nombres premiers successifs, environ un sur deux figure dans la première catégorie, un sur quatre dans la deuxième, un sur huit dans la troisième, un sur seize dans la quatrième, et ainsi de suite ; en résumé, un sur  $2^t$  en moyenne figure dans la  $t$  ième catégorie.

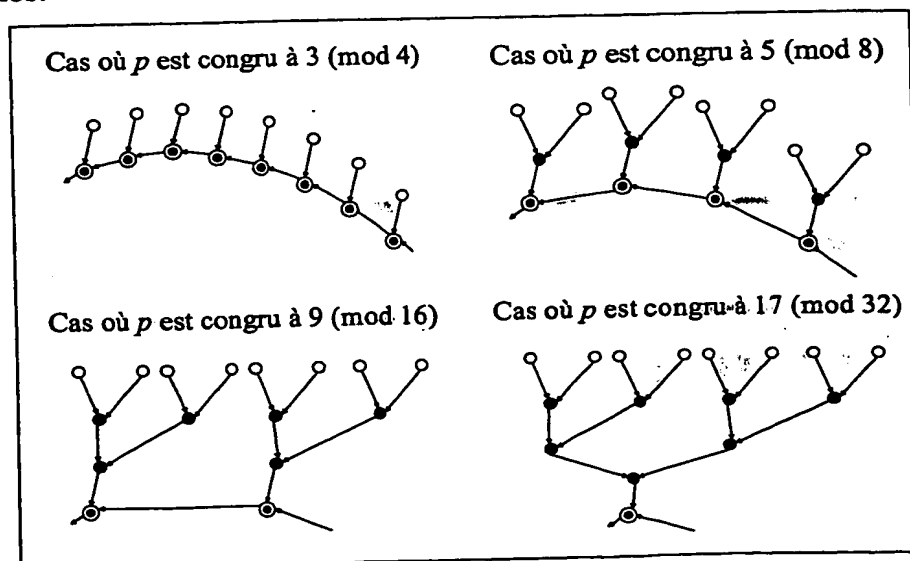
Considérons le comportement de la fonction « élever au carré dans  $\text{CG}(p)$  » selon la parité du rang de l'argument.

- Il y a un seul élément fixe : c'est 1. Le carré de tout autre élément de

rang impair est un autre élément ayant le même rang. Par conséquent, la clé  $\langle 2, p \rangle$  permute l'ensemble des  $(p-1)/2'$  éléments de rang impair. Le nombre de cycles de permutation dépend de la factorisation de  $(p-1)/2'$ . Par exemple, lorsque  $(p-1)/2'$  est un nombre premier  $p'$ , il y a un grand cycle de permutation comportant  $p'-1$  éléments.

- Le carré de tout élément de rang pair est un autre élément dont le rang est divisé par deux. Par conséquent, les éléments de rang pair se répartissent sur  $(p-1)/2'$  branches ; chaque élément non nul de rang impair porte une branche de longueur  $t$  comportant  $2^t-1$  éléments, à savoir : un élément de rang divisible par deux mais pas par quatre, puis, si  $t \geq 2$ , deux éléments de rang divisible par quatre mais pas par huit, puis, si  $t \geq 3$ , quatre éléments de rang divisible par huit mais pas par seize, puis, si  $t \geq 4$ , huit éléments de rang divisible par seize mais pas par 32, et ainsi de suite. Les  $2^{t-1}$  extrémités de chaque branche sont des résidus non quadratiques ; leur rang est divisible par  $2^t$ .

Le dessin suivant illustre la fonction « élever au carré dans  $\text{CG}(p)$  » par un graphe orienté où chacun des  $p-1$  éléments non nuls du corps trouve sa place : les résidus non quadratiques sont en blanc et les résidus quadratiques en noir ; parmi les résidus quadratiques, les éléments de rang impair sont encadrés.



Voyons comment calculer une solution en  $x$  à l'équation  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  sachant que  $a$  est un résidu quadratique de  $\text{CG}(p)$ , c'est-à-dire, comment « prendre une racine carrée dans  $\text{CG}(p)$  ». Il y a bien sûr plusieurs façons d'obtenir le même résultat : le lecteur pourra avantageusement consulter les pages 31 à 36 du livre de Henri Cohen, *a Course in Computational Algebraic Number Theory*, publié en 1993 par Springer à Berlin comme le volume 138 de la série *Graduate Texts in Mathematics* (GTM 138).

Calculons un nombre entier  $s = (p-1+2^t)/2^{t+1}$  pour établir une clé  $\langle s, p \rangle$ . Soit :  $\langle (p+1)/4, p \rangle$  lorsque  $p$  est congru à 3 (mod 4),  $\langle (p+3)/8, p \rangle$  lorsque  $p$  est congru à 5 (mod 8),  $\langle (p+7)/16, p \rangle$  lorsque  $p$  est congru à 9 (mod 16),  $\langle (p+15)/32, p \rangle$  lorsque  $p$  est congru à 17 (mod 32), et ainsi de suite.

- La clé  $\langle s, p \rangle$  donne la racine carrée de rang impair de n'importe quel élément de rang impair. En effet, dans  $\text{CG}(p)$ ,  $r^2/a$  vaut  $a$  élevé à la puissance  $(2 \cdot (p-1+2^t)/2^{t+1}) - 1 = (p-1)/2^t$ . Par conséquent, lorsque  $a$  est sur un cycle, la clé  $\langle s, p \rangle$  transforme  $a$  en une solution que nous nommons  $w$ . L'autre solution est  $p-w$ .
- D'une manière générale, la clé  $\langle s, p \rangle$  transforme tout résidu quadratique  $a$  en une première approximation de solution que nous nommons  $r$ . Voici deux points clés, puis, l'ébauche d'une méthode pour améliorer pas à pas l'approximation jusqu'à une racine carrée de  $a$ .
  - D'une part, puisque  $a$  est un résidu quadratique, la clé  $\langle 2^{t-1}, p \rangle$  transforme certainement  $r^2/a$  en 1.
  - D'autre part, supposons que nous connaissons un résidu non quadratique de  $\text{CG}(p)$  que nous nommons  $y$  ; la clé  $\langle (p-1)/2^t, p \rangle$  transforme  $y$  en un élément que nous nommons  $b$  : c'est une racine  $2^{t-1}$  ième de  $-1$  ; en effet,  $y^{(p-1)/2^t} \equiv -1 \pmod{p}$ . Par conséquent, dans  $\text{CG}(p)$ , le groupe multiplicatif des  $2^t$  racines  $2^t$  ièmes de l'unité est isomorphe au groupe multiplicatif des puissances de  $b$  pour les exposants de 1 à  $2^t$ .

- Pour se rapprocher d'une racine carrée de  $a$ , élevons  $r^2/a$  à la puissance  $2^{t-2} \pmod{p}$  : le résultat est  $+1$  ou  $-1$ . La nouvelle approximation reste  $r$  si le résultat est  $+1$  ou bien devient  $b.r \pmod{p}$  si le résultat est  $-1$ . Par conséquent, la clé  $(2^{t-2}, p)$  transforme certainement la nouvelle approximation en 1. On peut continuer à se rapprocher : au prochain pas, on ajustera s'il le faut en multipliant par  $b^2 \pmod{p}$  ; et ainsi de suite.

L'algorithme suivant établit des approximations successives pour aboutir à une racine carrée de  $a$  à partir des nombres entiers  $r$  et  $b$  définis ci-dessus ; il utilise deux variables entières :  $w$  initialisée par  $r$  pour représenter les approximations successives et  $jj$  prenant des valeurs parmi les puissances de 2, de 2 à  $2^{t-2}$ .

Pour  $i$  allant de 1 à  $t-2$ , répéter la séquence suivante :

- Calculer  $w^2/a \pmod{p}$ , puis, élever le résultat à la puissance  $2^{t-1} \pmod{p}$  : on doit obtenir  $+1$  ou  $-1$ . Lorsque l'on obtient  $-1$ , calculer  $jj = 2^i$ , puis, remplacer  $w$  par  $w.b^{jj} \pmod{p}$ . Lorsque l'on obtient  $+1$ , ne rien faire.

A l'issue du calcul,  $w$  et  $p-w$  sont les deux racines carrées de  $a$  dans  $CG(p)$ . En outre, nous apprenons que le rang de  $a$  dans  $CG(p)$  est divisible par  $2^i/jj$  mais pas par  $2^{i+1}/jj$ . La pertinence de cette remarque apparaîtra par la suite.

## Analyse des principes de la technologie GQ2 dans $CG(p)$

Soit deux nombres entiers  $g$  et  $k$  plus grands que 1 et un nombre premier  $p$  plus grand que  $g$ . Analysons l'existence et le nombre de solutions en  $x$  dans  $CG(p)$  aux équations (1.a), (2.a) et (3.a).

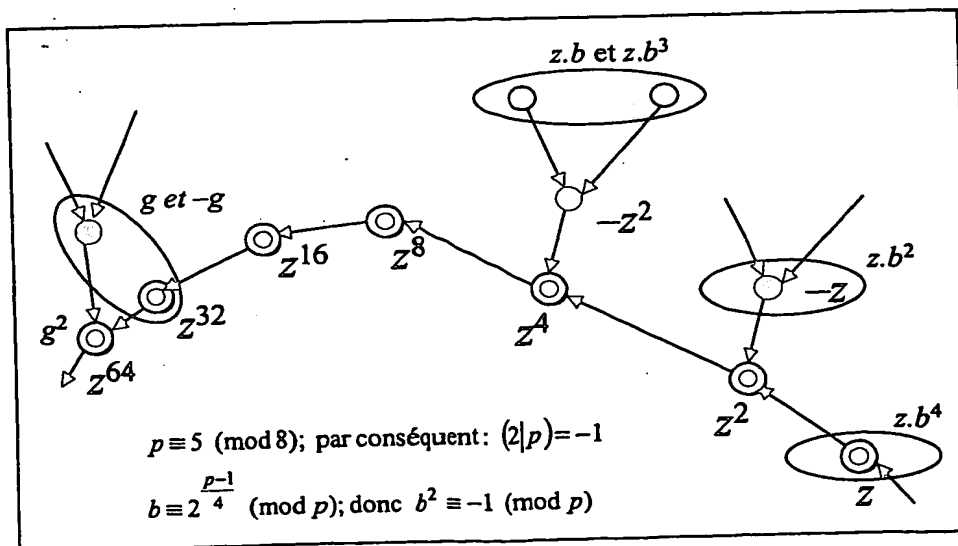
Dans le corps de Galois  $CG(p)$ , distinguons différents cas selon la valeur de  $t$ , c'est-à-dire, selon la puissance de deux qui divise  $p-1$ . Rappelons que  $p-1$  est divisible par  $2^t$ , mais pas par  $2^{t+1}$ , c'est-à-dire que  $p$  est congru à  $2^t+1 \pmod{2^{t+1}}$ . L'analyse précédente nous donne une idée assez précise du problème posé ainsi qu'une ébauche de solution.

Lorsque  $t = 1$ ,  $p$  est congru à 3 (mod 4). Les symboles de Legendre de  $g$  et

$-g$  par rapport à  $p$  sont différents ; tout résidu quadratique de  $CG(p)$  a deux racines carrées dans  $CG(p)$  : l'une est un résidu quadratique et l'autre un résidu non quadratique. D'une part, une des deux équations (1.a) ou (2.a) a deux solutions en  $x$  dans  $CG(p)$  et l'autre n'en a pas. D'autre part, l'équation (3.a) a deux solutions en  $x$  dans  $CG(p)$  quelle que soit la valeur de  $k$ .

Lorsque  $t = 2$ ,  $p$  est congru à 5 (mod 8). Deux cas se présentent selon le symbole de Legendre de  $g$  par rapport à  $p$ . Lorsque le symbole vaut  $-1$ ,  $g$  et  $-g$  sont deux résidus non quadratiques de  $CG(p)$  : les trois équations (1.a), (2.a) et (3.a) n'ont pas de solution en  $x$  dans  $CG(p)$ . Lorsque le symbole vaut  $+1$ ,  $g$  et  $-g$  sont deux résidus quadratiques de  $CG(p)$ , chaque équation (1.a) et (2.a) a deux solutions en  $x$  dans  $CG(p)$  ; de plus, le rang de  $g^2$  dans  $CG(p)$  est impair, ce qui implique que quelle que soit la valeur de  $k$ , l'équation (3.a) a quatre solutions en  $x$  dans  $CG(p)$  dont une seule de rang impair.

Le dessin suivant illustre les solutions à l'équation (3.a) avec  $k = 6$  et  $p$  congru à 5 (mod 8), soit  $t = 2$ . Remarquons que, parce que le symbole de Legendre de 2 par rapport à  $p$  congru à 5 (mod 8) vaut  $-1$ ,  $2^{(p-1)/4} \pmod{p}$  est alors une racine carrée de  $-1$ .



Lorsque  $t = 3$ ,  $p$  est congru à 9 (mod 16). Considérons le symbole de Legendre de  $g$  par rapport à  $p$ . Lorsque le symbole vaut  $-1$ ,  $g$  et  $-g$  sont deux résidus non quadratiques de  $CG(p)$  : les trois équations (1.a), (2.a) et (3.a) n'ont pas de solution en  $x$  dans  $CG(p)$ . Lorsque le symbole vaut  $+1$ ,  $g$  et  $-g$  sont deux résidus quadratiques de  $CG(p)$  ; chaque équation (1.a) et (2.a) a deux solutions en  $x$  dans  $CG(p)$  ; l'existence de solutions en  $x$  à l'équation (3.a) dépend du rang de  $g^2$  dans  $CG(p)$  : ce rang est impair ou divisible par deux, mais pas par quatre. Lorsque le rang de  $g^2$  dans  $CG(p)$  est divisible par deux, mais pas par quatre, l'équation (3.a) a quatre solutions en  $x$  dans  $CG(p)$  pour  $k = 2$  ; elle n'en a pas pour  $k \geq 3$ . Lorsque le rang de  $g^2$  dans  $CG(p)$  est impair, l'équation (3.a) a quatre solutions en  $x$  dans  $CG(p)$  pour  $k = 2$  et huit pour  $k \geq 3$  ; dans les deux cas, une seule est de rang impair.

Lorsque  $t = 4$ ,  $p$  est congru à 17 (mod 32). Considérons le symbole de Legendre de  $g$  par rapport à  $p$ . Lorsque le symbole vaut  $-1$ ,  $g$  et  $-g$  sont deux résidus non quadratiques de  $CG(p)$  : les trois équations (1.a), (2.a) et (3.a) n'ont pas de solution en  $x$  dans  $CG(p)$ . Lorsque le symbole vaut  $+1$ ,  $g$  et  $-g$  sont deux résidus quadratiques de  $CG(p)$  ; chaque équation (1.a) et (2.a) a deux solutions en  $x$  dans  $CG(p)$  ; l'existence de solutions en  $x$  à l'équation (3.a) dépend du rang de  $g^2$  dans  $CG(p)$  : ce rang est impair ou divisible par deux ou quatre, mais pas par huit. Lorsque le rang de  $g^2$  dans  $CG(p)$  est divisible par quatre, mais pas par huit, l'équation (3.a) a quatre solutions en  $x$  dans  $CG(p)$  pour  $k = 2$  ; elle n'en a pas pour  $k \geq 3$ . Lorsque le rang de  $g^2$  dans  $CG(p)$  est divisible par deux, mais pas par quatre, l'équation (3.a) a quatre solutions en  $x$  dans  $CG(p)$  pour  $k = 2$  ou huit pour  $k = 3$  ; elle n'en a pas pour  $k \geq 4$ . Lorsque le rang de  $g^2$  dans  $CG(p)$  est impair, l'équation (3.a) a quatre solutions en  $x$  dans  $CG(p)$  pour  $k = 2$ , huit pour  $k = 3$  et seize pour  $k \geq 4$  ; dans les trois cas, une seule est de rang impair.

Et ainsi de suite, de sorte que le cas où  $p$  est congru à 1 (mod 4) peut se

résumer comme suit.

Lorsque  $p$  est congru à 1 (mod 4), considérons le symbole de Legendre de  $g$  par rapport à  $p$ . Lorsque le symbole vaut  $-1$ ,  $g$  et  $-g$  sont deux résidus non quadratiques de  $CG(p)$  : les trois équations (1.a), (2.a) et (3.a) n'ont pas de solution en  $x$  dans  $CG(p)$ . Lorsque le symbole vaut  $+1$ ,  $g$  et  $-g$  sont deux résidus quadratiques de  $CG(p)$  ; chaque équation (1.a) et (2.a) a deux solutions en  $x$  dans  $CG(p)$ . Définissons le nombre entier  $u$  : le rang de  $g^2$  dans  $CG(p)$  est divisible par  $2^u$ , mais pas par  $2^{u+1}$  ; la valeur de  $u$  figure parmi les  $t-1$  valeurs possibles, de 0 à  $t-2$ . L'existence et le nombre de solutions en  $x$  dans  $CG(p)$  à l'équation (3.a) dépend des valeurs de  $k$ ,  $t$  et  $u$ . Lorsque  $u$  est positif et  $k$  est supérieur à  $t-u$ , l'équation (3.a) n'a pas de solution en  $x$  dans  $CG(p)$ . Lorsque  $u$  est nul et  $k$  supérieur à  $t$ , l'équation (3.a) a  $2^t$  solutions en  $x$  dans  $CG(p)$ . Lorsque  $k$  inférieur ou égal à  $t-u$ , l'équation (3.a) a  $2^k$  solutions en  $x$  dans  $CG(p)$ .

Applicabilité des principes GQ2 dans les anneaux d'entiers modulo

Pour que l'équation (1), respectivement (2), n'ait pas de solution en  $x$  dans l'anneau des entiers modulo  $n$ , il faut et il suffit que, pour au moins un des facteurs premiers  $p$ , de  $p_1$  à  $p_r$ , l'équation (1.a), respectivement (2.a), n'ait pas de solution en  $x$  dans  $CG(p)$ .

Pour que l'équation (3) ait des solutions en  $x$  dans l'anneau des entiers modulo  $n$ , il faut et il suffit que, pour chacun des facteurs premiers  $p$ , de  $p_1$  à  $p_r$ , l'équation (3.a) ait des solutions en  $x$  dans  $CG(p)$ .

L'équation (3) interdit tout facteur premier  $p$  congru à 1 (mod 4) dès que pour l'un des nombres de base  $g$ , de  $g_1$  à  $g_m$  : ou bien, le symbole de Legendre de  $g$  par rapport à  $p$  est égal à  $-1$  ; ou bien, le symbole de Legendre de  $g$  par rapport à  $p$  est égal à  $+1$  avec la condition :  $u$  positif et supérieur à  $t-k$ . Pour qu'un facteur premier  $p$  congru à 1 (mod 4) soit possible, il doit remplir l'une des deux conditions suivantes pour chacun des nombres de base  $g$ , de  $g_1$  à  $g_m$ , selon les deux nombres entiers  $t$  et  $u$

définis ci-dessus. Ou bien, le rang de  $G = g^2$  est impair dans  $CG(p)$ , c'est-à-dire,  $u = 0$ , quelle que soit la valeur de  $k$ . Ou bien, le rang de  $G = g^2$  est pair dans  $CG(p)$ , c'est-à-dire,  $u > 0$ , et il satisfait la condition :  $u + k \leq t$ .

Un produit de facteurs premiers congrus à 1 (mod 4) ne peut assurer l'ensemble des principes de la technologie GQ2. Chaque module GQ2 doit avoir au moins deux facteurs premiers congrus à 3 (mod 4) tels que, pour chaque nombre de base  $g$ , le symbole de Legendre de  $g$  par rapport à l'un diffère du symbole de Legendre de  $g$  par rapport à l'autre. Lorsque tous les facteurs premiers sont congrus à 3 (mod 4), on dira que le module GQ2 est **basique**. Lorsqu'en plus d'au moins deux facteurs premiers congrus à 3 (mod 4), le module inclut un ou plusieurs facteurs premiers congrus à 1 (mod 4), on dira que le module GQ2 est **mixte**.

### Construction systématique de modules GQ2

Au départ, il faut fixer les contraintes globales à imposer au module  $n$  : une taille en bits (par exemple, 512 ou 1024 bits) ainsi qu'un nombre de bits successifs à 1 en poids forts (au moins un bien sûr, typiquement 16 ou 32 bits), un nombre  $f$  de facteurs premiers et un nombre  $e$  (pouvant être nul) de facteurs premiers devant être congrus à 1 (mod 4) ; les autres facteurs premiers, soit  $f - e$  facteurs, au moins deux, doivent être congrus à 3 (mod 4). Le module  $n$  sera le produit de  $f$  facteurs premiers de tailles voisines. Lorsque  $e = 0$ , on obtient un module GQ2 basique ; lorsque  $e > 0$ , on obtient un module GQ2 mixte. Un module basique est le produit de facteurs premiers tous congrus à 3 (mod 4). Un module GQ2 mixte apparaît donc comme le produit d'un module GQ2 basique par un ou plusieurs autres facteurs premiers congrus à 1 (mod 4). On produit d'abord des facteurs premiers congrus à 3 (mod 4). Ensuite, si  $e > 0$ , on produit des facteurs premiers congrus à 1 (mod 4).

Pour l'efficacité de la construction de modules GQ2, il vaut bien mieux sélectionner chaque candidat avant de chercher à savoir s'il est premier.

Notés par  $g_1, g_2, \dots$ , les nombres de base figurent typiquement parmi les premiers nombres premiers : 2, 3, 5, 7, ... Faute d'indication contraire, les  $m$  nombres de base sont les  $m$  premiers nombres premiers :  $g_1 = 2, g_2 = 3, g_3 = 5, g_4 = 7, \dots$  Toutefois, notons les remarques suivantes : il faut éviter 2 si l'on escompte un facteur congru à 5 (mod 8) ; il faut éviter 3 si l'on doit utiliser la clé publique  $\langle 3, n \rangle$  comme clé publique de vérification RSA.

### Choix de $f-e$ facteurs premiers congrus à 3 (mod 4)

A partir du deuxième facteur, le programme demande et utilise un nombre de base par facteur. Pour le choix du dernier facteur congru à 3 (mod 4), le programme demande s'il y a d'autres nombres de base, c'est-à-dire, si  $m$  est égal ou supérieur à  $f-e$ , puis, si tel est le cas, demande et prend en compte les derniers nombres de base, de  $g_{f-e}$  à  $g_m$ . Pour formaliser le choix des facteurs premiers congrus à 3 (mod 4), nous avons introduit une notion de profil ; le profil caractérise un nombre entier  $g$  par rapport à un ensemble de facteurs premiers plus grands que  $g$  et congrus à 3 (mod 4).

- Lorsqu'un nombre entier  $g$  a le même symbole de Legendre par rapport à deux facteurs premiers, on dit que les facteurs premiers sont équivalents par rapport à  $g$ . Sinon, ils sont complémentaires par rapport à  $g$ .
- Noté par  $\text{Profil}(g)$ , le profil d'un nombre entier  $g$  par rapport à  $f$  facteurs premiers  $p_1, p_2, \dots, p_f$  est une séquence de  $f$  bits, un bit par facteur premier. Le premier bit vaut 1 ; chaque bit suivant vaut 1 ou 0 selon que le facteur suivant est équivalent ou complémentaire de  $p_i$  par rapport à  $g$ .
- Lorsque tous les bits d'un profil sont égaux à 1, on dit que le profil est plat. Dans un tel cas, tous les symboles de Legendre de  $g$  sont égaux à +1, ou bien, à -1. Lorsque le profil de  $g$  est non plat, les équations (1) et (2) n'ont pas de solution en  $x$  dans l'anneau des entiers modulo  $n$ .
- Par définition, le profil de  $g$  par rapport à un seul nombre premier congru à 3 (mod 4) est toujours plat. Cette extension permet de généraliser l'algorithme de choix des facteurs premiers congrus à 3 (mod 4).

Lorsque les profils de deux nombres de base  $g_1$  et  $g_2$  sont différents, ce qui implique au moins trois facteurs premiers congrus à 3 (mod 4), la connaissance des deux valeurs privées  $Q_1$  et  $Q_2$  induit la connaissance de deux décompositions différentes du module  $n$ . Lorsque les nombres de base sont des petits nombres premiers, le programme assure que les profils des  $2^{f-1}-1$  combinaisons multiplicatives des  $f-1$  premiers nombres de base sont tous différents : ils prennent toutes les valeurs possibles. La notion de profil ne s'étend pas aux facteurs premiers congrus à 1 (mod 4).

**Premier facteur premier  $p_1$  congru à 3 (mod 4) :** Chaque candidat doit être congru à 3 (mod 4), sans autre contrainte particulière.

**Deuxième facteur premier  $p_2$  congru à 3 (mod 4) avec prise en compte du premier nombre de base  $g_1$  :** Chaque candidat doit être complémentaire de  $p_1$  par rapport à  $g_1$ .

**Troisième facteur premier  $p_3$  congru à 3 (mod 4) avec prise en compte du deuxième nombre de base  $g_2$  :** Selon le profil de  $g_2$  par rapport aux deux premiers facteurs premiers  $p_1$  et  $p_2$ , deux cas se présentent. Lorsque  $\text{Profil}_2(g_2)$  est plat, chaque candidat doit être complémentaire de  $p_1$  par rapport à  $g_2$ . Sinon, on a  $\text{Profil}_2(g_1) = \text{Profil}_2(g_2)$  ; chaque candidat doit alors assurer que  $\text{Profil}_3(g_1) \neq \text{Profil}_3(g_2)$ .

**Choix du  $i$  ième facteur premier  $p_{i+1}$  congru à 3 (mod 4) avec prise en compte du nombre de base  $g_i$  :** Selon le profil de  $g_i$  par rapport aux  $i$  premiers facteurs premiers  $p_1, p_2, \dots, p_i$ , deux cas se présentent. Lorsque  $\text{Profil}_i(g_i)$  est plat, chaque candidat doit être complémentaire de  $p_1$  par rapport à  $g_i$ . Sinon, parmi les  $i-1$  nombres de base  $g_1, g_2, \dots, g_{i-1}$  et toutes leurs combinaisons multiplicatives,  $g_1 g_2, \dots, g_1 g_2 \dots g_{i-1}$ , soit en tout  $2^{i-1}-1$  nombres entiers, il existe un nombre entier  $g$  et un seul tel que  $\text{Profil}_i(g_i) = \text{Profil}_i(g)$  ; chaque candidat doit alors assurer que  $\text{Profil}_{i+1}(g_i) \neq \text{Profil}_{i+1}(g)$ .

**Dernier facteur premier  $p_{f-1}$  congru à 3 (mod 4) avec prise en compte du nombre de base  $g_{f-1}$  et des autres nombres de base de  $g_{f-1}$  à  $g_m$  :** On prend en

compte les contraintes dues au nombre de base  $g_{f-e-1}$ , tout comme ci-dessus. En outre, lorsque  $m$  est égal ou supérieur à  $f-e$ , chaque candidat doit assurer un profil non plat aux derniers nombres de base, de  $g_{f-e}$  à  $g_m$ , par rapport aux  $f-e$  facteurs premiers. Chaque candidat doit être complémentaire de  $p_1$  par rapport à tous les  $g_i$  pour lesquels  $\text{Profil}_{f-e-1}(g_i)$  est plat.

En résumé, les facteurs premiers congrus à 3 (mod 4) sont choisis les uns en fonction des autres.

Pour  $i$  allant de 0 à  $f-e-1$ , pour choisir le  $i+1$  ième facteur premier congru à 3 (mod 4), le candidat  $p_{i+1}$  doit passer avec succès l'examen suivant :

✓ Si  $i > m$  ou si  $i = 0$ , alors le candidat  $p_{i+1}$  n'a pas d'autre contrainte ; il est donc accepté.

✓ Si  $0 < i \leq m$ , alors le candidat  $p_{i+1}$  doit prendre en compte le  $i$  ième nombre de base  $g_i$ . On calcule le profil  $\text{Profil}_i(g_i)$  du nombre de base  $g_i$  par rapport aux  $i$  premiers facteurs premiers, de  $p_1$  à  $p_i$ . Selon le résultat, un et un seul des deux cas suivants se présente :

- Si le profil est plat, alors le candidat  $p_{i+1}$  doit être complémentaire de  $p_1$  par rapport à  $g_i$  ; sinon, il faut le rejeter.

- Sinon, parmi les  $i-1$  nombres de base et toutes leurs combinaisons multiplicatives, il y a un et un seul nombre que nous nommons  $g$  tel que  $\text{Profil}_i(g) = \text{Profil}_i(g_i)$  ; alors le candidat  $p_{i+1}$  doit être tel que  $\text{Profil}_{i+1}(g) \neq \text{Profil}_{i+1}(g_i)$  ; sinon, il faut le rejeter.

✓ Si  $i+1 = f-e$  et  $i < m$ , c'est-à-dire, pour choisir le dernier facteur premier congru à 3 (mod 4) lorsqu'il reste des nombres de base, de  $g_{f-e}$  à  $g_m$ , qui n'ont pas encore été pris en compte, le candidat  $p_{f-e}$  doit les prendre en compte : parmi ces derniers nombres de base, on sélectionne ceux dont le profil  $\text{Profil}_{f-e-1}(g_i)$  est plat ; le candidat  $p_{f-e}$  doit être complémentaire de  $p_1$  par rapport à chacun des nombres de base ainsi sélectionnés ; sinon, il faut le rejeter.

Le candidat est accepté lorsqu'il a passé avec succès les tests appropriés.

### Choix de $e$ facteurs premiers congrus à 1 (mod 4)

Pour être acceptable, chaque candidat  $p$  congru à 1 (mod 4) doit remplir les conditions suivantes par rapport à chaque nombre de base de  $g_1$  à  $g_m$ .

- Evaluons le symbole de Legendre de chaque nombre de base  $g_i$  par rapport à  $p$ . Si le symbole vaut  $-1$ , rejetons le candidat  $p$  pour passer à un autre candidat. Si le symbole vaut  $+1$ , poursuivons l'évaluation du candidat. Notons que si le nombre entier 2 est utilisé comme nombre de base, alors tous les candidats congrus à 5 (mod 8) doivent être écartés : le nombre de base 2 est incompatible avec un facteur congru à 5 (mod 8).

- Calculons un nombre entier  $s = (p-1+2^t)/2^{t-1}$  pour établir une clé  $\langle s, p \rangle$ . Appliquons la clé  $\langle s, p \rangle$  à chaque valeur publique  $G_i$  pour obtenir un résultat  $r$ . Deux cas se présentent :

- Si  $r$  vaut  $g_i$  ou  $-g_i$ , alors  $u = 0$ . Dans ce cas et dans ce cas seulement,  $G_i$  est sur un cycle. Remarquons un cas trivial :  $G_i$  est sur un cycle dès lorsque  $p$  est congru à 5 (mod 8) et que le symbole de Legendre de  $g_i$  par rapport à  $p$  vaut  $+1$ . Rappelons que  $G_i = 4$  est impossible dans ce cas.

- Si  $r$  ne vaut ni  $g_i$  ni  $-g_i$ , alors  $u > 0$  ; notons que la clé  $\langle (p-1)/2^t, p \rangle$  transforme tout résidu non quadratique  $y$  en un élément  $b$  qui est une racine  $2^t$  ième primitive de l'unité. L'algorithme suivant calcule  $u$  à partir de  $r$  et  $b$  en utilisant deux variables entières :  $w$  initialisée par  $r$  et  $jj$  prenant des valeurs de 2 à  $2^{t-2}$ .

Pour  $i$  allant de 1 à  $t-2$ , répéter la séquence suivante :

- Calculer  $w^2/G_i \pmod{p_i}$ , puis, élever le résultat à la puissance  $2^{t-i-1} \pmod{p_i}$  : on doit obtenir  $+1$  ou  $-1$ . Lorsque l'on obtient  $-1$ , calculer  $jj = 2^i$ , puis, remplacer  $w$  par  $w.b^{jj} \pmod{p_i}$ . Lorsque l'on obtient  $+1$ , ne rien faire.

A l'issue du calcul, la variable  $w$  a pour valeur  $g_i$  ou  $-g_i$ . De plus, nous savons que le rang de  $G_i$  dans  $CG(p_i)$  est divisible par  $2^i/jj$  mais pas par

$2^{t-1}/jj$ , c'est-à-dire que  $jj$  détermine la valeur de  $u$  par  $jj = 2^{t-u}$ . Lorsque  $v$  est plus grand que  $jj$ , c'est-à-dire,  $k > t-u$ , rejeter le candidat pour passer à un autre. Lorsque  $v$  est plus petit ou égal à  $jj$ , c'est-à-dire,  $k \leq t-u$ , poursuivre l'évaluation du candidat.

5 Lorsque les  $f$  facteurs premiers ont été produits, le module public  $n$  est le produit des  $f$  facteurs premiers  $p_1, p_2, \dots, p_f$ . L'entier non signé  $n$  peut se représenter par une séquence binaire; cette séquence respecte les contraintes imposées au début du programme pour la taille en bits et pour le nombre de bits successifs à 1 en poids forts. Le choix des facteurs premiers assure les propriétés suivantes du module  $n$  par rapport à chacun des  $m$  nombres de base  $g_1, g_2, \dots, g_m$ . D'une part, les équations (1) et (2) n'ont pas de solution en  $x$  dans l'anneau des entiers modulo  $n$ . D'autre part, l'équation (3) a des solutions en  $x$  dans l'anneau des entiers modulo  $n$ .

10 En résumé, les facteurs premiers congrus à 1 (mod 4) sont choisis indépendamment les uns des autres. Alors que les facteurs congrus à 3 (mod 4) prennent en compte progressivement les nombres de base, chaque facteur premier congru à 1 (mod 4) doit prendre en compte l'ensemble des contraintes imposées par chacun des nombres de base. Chaque facteur premier congru à 1 (mod 4), soit  $p$ , de  $p_{f-e}$  à  $p_f$ , doit avoir passé avec succès l'examen suivant en deux étapes.

20 1) L'étape (1) s'exécute successivement pour chacun des  $m$  nombres de base de  $g_1$  à  $g_m$ .

On calcule le symbole de Legendre du nombre de base courant  $g$  par rapport au candidat  $p$ . Un et un seul des deux cas suivants se présente : Si le symbole vaut  $-1$ , on rejette le candidat. Sinon (le symbole vaut  $+1$ ), on poursuit l'examen en passant au nombre de base  $g$  suivant à l'étape (1).

25 Lorsque le candidat est acceptable pour l'ensemble des  $m$  nombres de base, on passe à l'étape (2).

2) L'étape (2) s'exécute successivement pour chacune des  $m$  valeurs

publiques de  $G_1$  à  $G_m$ .

On calcule un entier  $t$  tel que  $p-1$  est divisible par  $2^t$  mais pas par  $2^{t+1}$ , puis, un entier  $s = (p-1+2^t)/2^{t+1}$ , de façon à établir une clé  $\langle s, p \rangle$ . On applique la clé  $\langle s, p \rangle$  à la valeur publique courante  $G = g^2$  pour obtenir un résultat  $r$ , soit :  $r \equiv G^s \pmod{p}$ . Selon le résultat, un et un seul des deux cas suivants se présente :

- a) Si  $r$  est égal à  $g$  ou à  $-g$ , alors  $u = 0$  ; on poursuit l'examen du candidat en passant à la valeur publique  $G$  suivante à l'étape (2).
- b) Sinon, on calcule un nombre  $u$  positif, prenant une des valeurs de 1 à  $t-2$ , en appliquant l'algorithme suivant qui met en œuvre deux variables :  $jj$  prenant des valeurs allant de 2 à  $2^{t-2}$  et  $w$  initialisée par  $r$ , ainsi qu'un nombre entier  $b$  obtenu en appliquant une clé  $\langle (p-1)/2^t, p \rangle$  à un résidu non quadratique de  $\mathbb{C}\mathbb{G}(p)$ .

Pour un indice  $ii$  allant de 1 à  $t-2$ , on répète l'opération suivante :

On calcule  $w^2/G \pmod{p}$ , puis on applique une clé  $\langle 2^{t-ii-1}, p \rangle$  au résultat pour obtenir  $+1$  ou  $-1$  (sinon, on a une preuve que le candidat n'est pas premier). Si l'on obtient  $-1$ , alors on calcule  $jj = 2^{ii}$ , puis,  $c \equiv b^{jj} \pmod{p}$ , puis, on remplace  $w$  par  $w \cdot c \pmod{p}$ , puis, on passe à l'indice  $ii$  suivant. Si l'on obtient  $+1$ , on passe à l'indice  $ii$  suivant.

A l'issue de l'algorithme, la valeur figurant dans la variable  $jj$  définit  $u$  par la relation  $jj = 2^{t-u}$  ; la valeur figurant dans la variable  $w$  est une racine carrée de  $G$ , c'est-à-dire,  $g$  ou  $-g$  (sinon, on a une preuve que le candidat n'est pas premier). Deux cas se présentent :

- Si  $t-u < k$ , alors on rejette le candidat  $p$  parce que la branche où figure  $G$  n'est pas assez longue.
- Sinon ( $t-u \geq k$ ), on poursuit l'évaluation du candidat en passant à la valeur publique  $G$  suivante à l'étape (2).

Lorsque le candidat est acceptable pour l'ensemble des  $m$  valeurs publiques,

il est accepté comme facteur premier congru à 1 (mod 4).

Calcul des valeurs associées

Pour obtenir les composantes privées, calculons toutes les solutions à l'équation (3.a) dans les deux cas les plus simples et les plus courants avant d'aborder le cas général.

Pour chaque facteur premier  $p_j$  congru à 3 (mod 4), la clé  $\langle (p_j+1)/4, p_j \rangle$  donne la racine carrée quadratique de n'importe quel résidu quadratique. On en déduit une manière de calculer une solution à l'équation (3.a) :

$$s_j \equiv ((p_j+1)/4)^k \pmod{(p_j-1)/2}; \quad \text{puis,} \quad Q_{ij} \equiv G_i^{s_j} \pmod{p_j}$$

ou bien plutôt, l'inverse (mod  $p_j$ ) d'une telle solution.

$$s_j \equiv (p_j-1)/2 - ((p_j+1)/4)^k \pmod{(p_j-1)/2}; \quad \text{puis,} \quad Q_{ij} \equiv G_i^{s_j} \pmod{p_j}$$

Dans  $CG(p_j)$ , il y a alors deux et seulement deux racines carrées de l'unité : +1 et -1 ; il y a donc deux solutions en  $x$  à l'équation (3.a) : les deux nombres  $Q_{ij}$  et  $p_j - Q_{ij}$  ont le même carré  $G_i \pmod{p_j}$ .

Pour chaque facteur premier  $p_j$  congru à 5 (mod 8), la clé  $\langle (p_j+3)/8, p_j \rangle$  donne la racine carrée de rang impair de n'importe quel élément de rang impair. On en déduit une solution à l'équation (3.a) :

$$s_j \equiv ((p_j+3)/8)^k \pmod{(p_j-1)/4}; \quad \text{puis,} \quad Q_{ij} \equiv G_i^{s_j} \pmod{p_j}$$

ou bien plutôt, l'inverse (mod  $p_j$ ) d'une telle solution.

$$s_j \equiv (p_j-1)/4 - ((p_j+3)/8)^k \pmod{(p_j-1)/4}; \quad \text{puis,} \quad Q_{ij} \equiv G_i^{s_j} \pmod{p_j}$$

Dans  $CG(p_j)$ , il y a alors quatre et seulement quatre racines quatrièmes de l'unité ; il y a donc quatre solutions en  $x$  à l'équation (3.a). Remarquons que  $2^{(p_j-1)/4} \pmod{p_j}$  est une racine carrée de -1 parce que le symbole de Legendre de 2 par rapport à  $p$  congru à 5 (mod 8) vaut -1. Si  $Q_{ij}$  est une solution, alors  $p_j - Q_{ij}$  est une autre solution, ainsi que le produit (mod  $p_j$ ) de  $Q_{ij}$  par une racine carrée de -1.

Pour un facteur premier  $p_j$  congru à  $2^t+1 \pmod{2^{t+1}}$ , la clé  $\langle (p_j-1+2^t)/2^{t+1}, p_j \rangle$  donne la racine carrée de rang impair de n'importe quel élément de rang impair. On peut donc calculer une solution à l'équation (3.a).

- Calculons d'abord un nombre entier  $s_j \equiv ((p_j-1+2^t)/2^{u+1})^k \pmod{(p_j-1)/2^t}$  pour établir une clé  $\langle s_j, p_j \rangle$ .
- Lorsque la clé  $\langle (p_j-1+2^t)/2^{u+1}, p_j \rangle$  transforme  $G_i$  en  $g_i$  ou en  $-g_i$ , le rang de  $G_i$  est impair dans  $CG(p_j)$  ( $u = 0$ ). Alors, la clé  $\langle s_j, p_j \rangle$  transforme  $G_i$  en un nombre  $z$  : c'est la solution de rang impair à l'équation (3.a). Selon les valeurs de  $t$  et de  $k$ , il y a encore  $\min(2^k-1, 2^t-1)$  autres solutions sur une ou plusieurs branches. La branche de  $z^2$  porte une autre solution : c'est  $p_j-z$ . Lorsque  $t \geq 2$ , la branche de  $z^4$  porte deux autres solutions : c'est le produit de  $z$  par chacune des deux racines carrées de  $-1$ , c'est-à-dire, chacune des deux racines quatrièmes primitives de l'unité. Or, si  $y$  est un résidu non quadratique de  $CG(p_j)$ , alors,  $y^{(p_j-1)/4} \pmod{p_j}$  est une racine carrée de  $-1$ . D'une manière générale, pour  $i$  prenant chaque valeur de 1 à  $\min(k, t)$ , la branche de la puissance  $2^i$  ième de  $z$  porte  $2^{t-i}$  solutions : ce sont les produits  $\pmod{p_j}$  de  $z$  par chacune des  $2^{t-i}$  racines  $2^i$  ièmes primitives de l'unité. Or, si  $y$  est un résidu non quadratique de  $CG(p_j)$ , alors,  $y$  à la puissance  $(p_j-1)/2^i$  est une racine  $2^i$  ième primitive de l'unité que nous nommons  $c$ . Les  $2^{t-i}$  racines  $2^i$  ièmes primitives de l'unité sont les puissances impaires de  $c$  :  $c, c^3 \pmod{p_j}, c^5 \pmod{p_j}, \dots c$  à la puissance  $2^i-1 \pmod{p_j}$ .
- Lorsque la clé  $\langle (p_j-1+2^t)/2^{u+1}, p_j \rangle$  transforme  $G_i$  en un nombre entier  $r$  qui n'est ni  $g_i$  ni  $-g_i$ , le rang de  $G_i$  est pair dans  $CG(p_j)$  ( $u > 0$ ). Alors, à condition que  $G_i$  soit convenablement placé sur une branche assez longue, c'est-à-dire,  $t \geq k + u$ , il y a  $2^k$  solutions sur la branche où figure  $G_i$ . Pour calculer une racine  $2^k$  ième, il suffit de réitérer  $k$  fois de rang l'algorithme de calcul de racine carrée donné ci-dessus, de façon à calculer les racines carrées des résultats successifs jusqu'à une solution  $z$ . Ce calcul peut bien sûr être optimisé pour approcher directement une racine  $2^k$  ième et ajuster ensuite une seule fois l'approximation d'une racine  $2^k$  ième pour atteindre une solution  $z$ . Pour obtenir toutes les autres

solutions, remarquons tout d'abord que si  $y$  est un résidu non quadratique de  $\text{CG}(p)$ , alors,  $y$  à la puissance  $(p-1)/2^k$  est une racine  $2^k$  ième primitive de l'unité que nous nommons  $d$ . Les  $2^k$  racines  $2^k$  ièmes de l'unité sont les puissances successives de  $d$  :  $d, d^2 \pmod{p}, d^3 \pmod{p}, \dots d$  à la puissance  $2^k-1 \pmod{p}$ ,  $d$  à la puissance  $2^k \pmod{p}$  qui vaut 1. Les  $2^k$  solutions sur la branche où figure  $G_i$  sont les produits  $\pmod{p}$  de  $z$  par chacune de ces racines.

En résumé, pour calculer une composante pour le facteur premier  $p$  et le nombre de base  $g$ , connaissant  $k, t$  et  $u$ , on procède comme suit :

- 1) On calcule un nombre entier :  $s \equiv ((p-1+2^t)/2^{t+1})^k \pmod{(p-1)/2^t}$  pour établir une clé  $\langle s, p \rangle$ . Puis, on applique la clé  $\langle s, p \rangle$  à  $G$  pour obtenir  $z \equiv G^s \pmod{p}$ . Selon la valeur de  $u$ , on passe à l'étape (2) ou (3).
- 2) Si  $u = 0$ ,  $z$  est la solution de rang impair à l'équation (3.a). Il y a encore  $\min(2^k-1, 2^t-1)$  autres solutions de rang pair sur une ou plusieurs branches, très exactement sur  $\min(k, t)$  autres branches. Pour  $i$  allant de 1 à  $\min(k, t)$ , la branche de la puissance  $2^i$  ième de  $z$  porte  $2^{t-i}$  solutions : ce sont les produits  $\pmod{p}$  de  $z$  par chacune des  $2^{t-i}$  racines  $2^i$  ièmes primitives de l'unité. La solution générique à l'équation (3.a) est représentée par  $zz$ . On passe à l'étape (4).
- 3) Si  $u > 0$ , toutes les solutions à l'équation (3.a) sont de rang pair. Il y en a  $2^k$  et elles figurent toutes sur la branche où figure  $G$  ; en effet :  $t-u \geq k$ . Pour calculer une solution, l'algorithme suivant met en œuvre deux variables :  $jj$  prenant des valeurs allant de 2 à  $2^{t-2}$  et  $w$  initialisée par  $z$ , ainsi qu'un nombre entier  $b$  obtenu en appliquant une clé  $\langle (p-1)/2^t, p \rangle$  à un résidu non quadratique de  $\text{CG}(p)$ .

On répète  $k$  fois de rang la séquence suivante :

Pour un indice  $ii$  allant de 1 à  $t-2$ , on répète l'opération suivante :

On calcule  $w^2/G \pmod{p}$ , puis, on applique une clé  $\langle 2^{t-ii-1}, p \rangle$  au résultat pour obtenir  $+1$  ou  $-1$  (sinon, on a une preuve que  $p$  n'est

pas premier). Si l'on obtient  $-1$ , alors on calcule  $jj = 2''$ , puis,  $c \equiv b'' \pmod{p}$ , puis, on remplace  $w$  par  $w.c \pmod{p}$ , puis, on passe à l'indice  $ii$  suivant. Si l'on obtient  $+1$ , on passe à l'indice  $ii$  suivant.

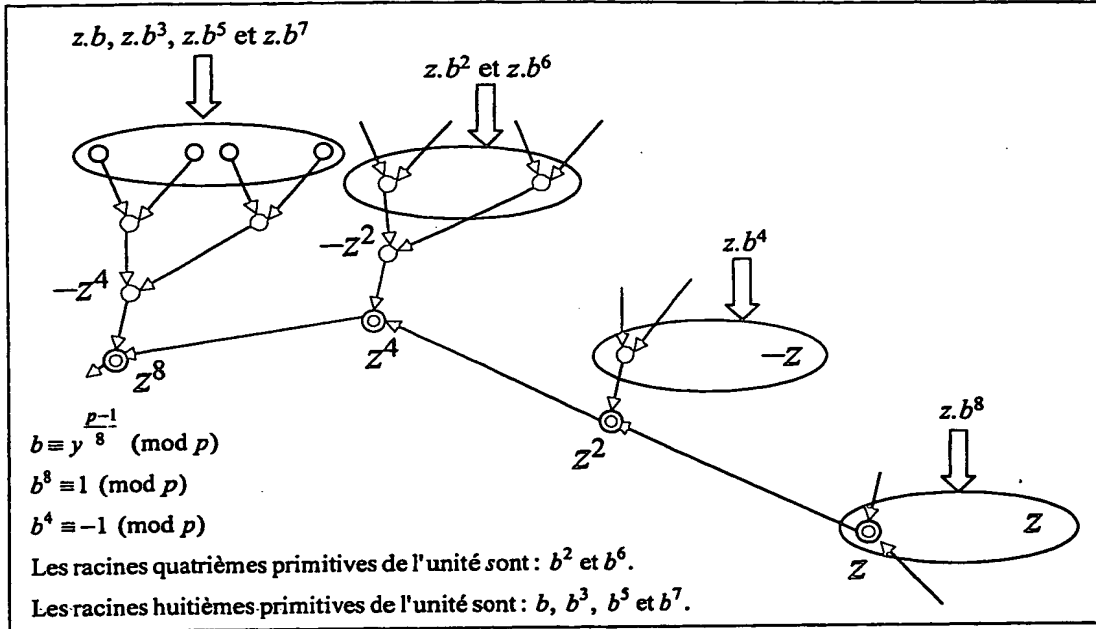
A l'issue de l'algorithme, la variable  $w$  a pour valeur  $za$ . Les  $2^k$  solutions sur la branche où figure  $G$  sont les produits  $\pmod{p}$  de  $za$  par chacune des  $2^k$  racines  $2^k$  ièmes de l'unité. La solution générique à l'équation (3.a) est représentée par  $zz$ . On passe à l'étape (4).

- 4) Connaissant  $zz$ , on en déduit une valeur de composante : c'est l'inverse de  $zz$  modulo  $p$  lorsque l'équation  $G.Q' \equiv 1 \pmod{n}$  est utilisée et  $zz$  lorsque l'équation  $G \equiv Q' \pmod{n}$  est utilisée.

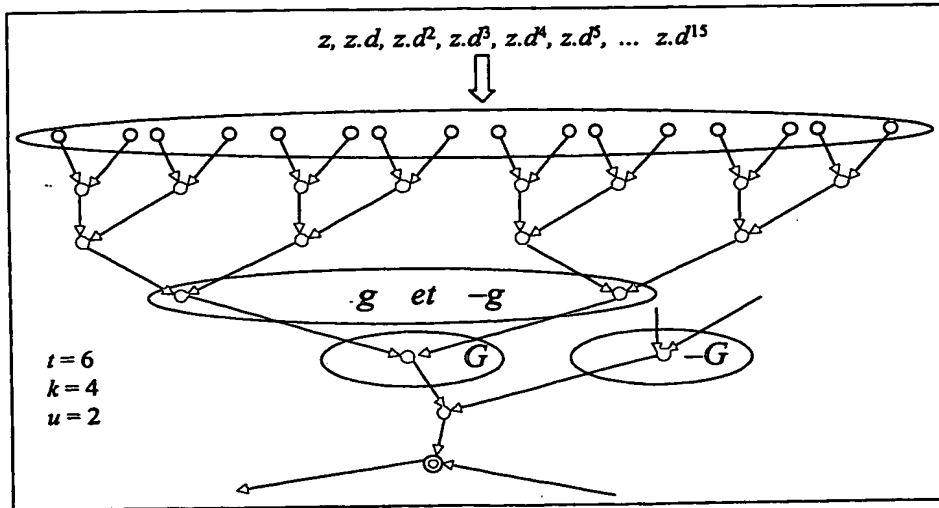
**Remarque.** Il y a diverses méthodes pour obtenir les composantes privées et les valeurs privées. Connaissant une collection de  $f$  composantes, c'est-à-dire, les  $f$  composante pour un nombre de base donné, la technique des restes chinois permet de calculer la valeur privée correspondante. On voit ainsi que, pour une valeur publique  $G$  et un module  $n$  donnés, il peut y avoir plusieurs valeurs privées  $Q$  possibles. Il y en a quatre lorsque  $n$  est le produit de deux facteurs premiers congrus à  $3 \pmod{4}$ ; il y en a huit avec trois facteurs premiers congrus à  $3 \pmod{4}$ ; il y en a seize avec deux facteurs premiers congrus à  $3 \pmod{4}$  et un congru à  $5 \pmod{8}$ . Un usage judicieux de ces multiples valeurs peut compliquer les attaques par analyse de la consommation électrique d'une carte à puce utilisant GQ2.

Ainsi, au fur et à mesure que  $t$  augmente, le programme se complique pour des cas de plus en plus rares. En effet, les nombres premiers se répartissent en moyenne comme suit :  $t = 1$  pour un sur deux,  $t = 2$  pour un sur quatre,  $t = 3$  pour un sur huit, et ainsi de suite. De plus, les contraintes dues aux  $m$  nombres de base rendent les candidatures de moins en moins acceptables. Quoi qu'il en soit, les modules mixtes font définitivement partie de la technologie GQ2 ; le type du module GQ2 n'affecte en rien les protocoles d'authentification dynamique et de signature numérique.

Le dessin suivant illustre  $G_i = g_i^2$  sur un cycle avec un facteur premier  $p$  congru à 9 (mod 16), c'est-à-dire,  $t = 3$ ,  $u = 0$ , ainsi que  $k \geq 3$ .



Le dessin suivant illustre  $G_i = g_i^2$  sur une branche avec un facteur premier  $p$  congru à 65 (mod 128), c'est-à-dire,  $t = 6$ , ainsi que  $k = 4$  et  $u = 2$ .



5

Voici un premier jeu de clés GQ2 avec  $k = 6$ , soit  $v = 64$ ,  $m = 3$ , soit trois nombres de base :  $g_1 = 3$ ,  $g_2 = 5$  et  $g_3 = 7$ , et  $f = 3$ , soit un module à trois facteurs premiers : deux congrus à 3 (mod 4) et un à 5 (mod 8). Notons que  $g = 2$  est incompatible avec un facteur premier congru à 5 (mod 8).

$$p_1 = 03CD2F4F21E0EAD60266D5CFCEBB6954683493E2E833$$

$$(2 | p_1) = -1 ; (3 | p_1) = +1 ; (5 | p_1) = -1 ; (7 | p_1) = +1$$

$$p_2 = 0583B097E8D8D777BAB3874F2E76659BB614F985EC1B$$

$$(2 | p_1) = -1 ; (3 | p_1) = -1 ; (5 | p_1) = +1 ; (7 | p_1) = -1$$

$$p_3 = 0C363CD93D6B3FEC78EE13D7BE9D84354B8FDD6DA1FD$$

$$(2 | p_1) = -1 ; (3 | p_1) = +1 ; (5 | p_1) = +1 ; (7 | p_1) = +1$$

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = FFFF81CEA149DCF2F72EB449C5724742FE2A3630D9$$

$$02CC00EAFEE1B957F3BDC49BE9CBD4D94467B72AF28CFBB26144$$

$$CDF4BBDBA3C97578E29CC9BBEE8FB6DDDD$$

$$Q_{1,1} = 0279C60D216696CD6F7526E23512DAE090CFF879FDDE$$

$$Q_{2,1} = 7C977FC38F8413A284E9CE4EDEF4AEF35BF7793B89$$

$$Q_{3,1} = 6FB3B9C05A03D7CADA9A3425571EF5ECC54D7A7B6F$$

$$Q_{1,2} = 0388EC6AA1E87613D832E2B80E5AE8C1DF2E74BFF502$$

$$Q_{2,2} = 04792CE70284D16E9A158C688A7B3FEAF9C40056469E$$

$$Q_{3,2} = FDC4A8E53E185A4BA793E93BEE5C636DA731BDCA4E$$

$$Q_{1,3} = 07BC1AB048A2EAFDAB59BD40CCF2F657AD8A6B573BDE$$

$$Q_{2,3} = 0AE8551E116A3AC089566DFDB3AE003CF174FC4E4877$$

$$Q_{3,3} = 01682D490041913A4EA5B80D16B685E4A6DD88070501$$

$$Q_1 = D7E1CAF28192CED6549FF457708D50A7481572DD5F2C335D8$$

$$C69E22521B510B64454FB7A19AEC8D06985558E764C6991B05FC2A$$

$$C74D9743435AB4D7CF0FF6557$$

$$Q_2 = CB1ED6B1DD649B89B9638DC33876C98AC7AF689E9D1359E4$$

$$DB17563B9B3DC582D5271949F3DBA5A70C108F561A274405A5CB8$$

$$82288273ADE67353A5BC316C093$$

$$Q_3 = 09AA6F4930E51A70CCDFA77442B10770DD1CD77490E3398A$$

$$AD9DC50249C34312915E55917A1ED4D83AA3D607E3EB5C8B197$$

$$697238537FE7A0195C5E8373EB74D$$

Voici d'autres valeurs possibles pour les composantes liées au facteur  $p_3$ , lequel est congru à 5 (mod 8).

Voici une racine carrée de  $-1$  dans  $\text{CG}(p_3)$  :  $c = 2^{(p_3-1)/4} \pmod{p_3} =$

0C3000933A854E4CB309213F12CAD59FA7AD775AAC37

$Q'_{1,3} = c \cdot Q_{1,3} \pmod{p_3} =$

050616671372B87DEC9AEEAC68A3948E9562F714D76C

5  $Q'_{2,3} = c \cdot Q_{2,3} \pmod{p_3} =$

06F308B529C9CE88D037D01002E7C838439DACC9F8AA

$Q'_{3,3} = c \cdot Q_{3,3} \pmod{p_3} =$

015BE9F4B92F1950A69766069F788E45439497463D58

Ce qui donne :

10  $Q'_1 = 676DF1BA369FF306F4A1001602BCE5A008DB82882E87C148D0$

D820A711121961C9376CB45C355945C5F2A9E5AFAAD7861886284A

9B319F9E4665211252D74580

$Q'_2 = \text{CAEC4F41752A228CF9B23B16B3921E47C059B9E0C68634C2C}$

64D6003156F30EF1BC02ADA25581C8FDE76AA14AB5CC60A2DE1C

15  $565560B27E8AA0E6F4BCA7FE966$

$Q'_3 = 2ACDF5161FE53B68CC7C18B6AFE495815B46599F44C51A6A1$

A4E858B470E8E5C7D2200EF135239AF0B7230388A6A5BDD8EE15B

0D094FC2BFA890BFDA669D9735

Voici un second jeu de clés GQ2, avec  $k = 9$ , soit  $v = 512$ ,  $m = 2$ , soit deux  
20 nombres de base :  $g_1 = 2$  et  $g_2 = 3$ , et  $f = 3$ , soit un module à trois facteurs  
premiers congrus à 3 (mod 4).

$p_1 = 03852103E40CD4F06FA7BAA9CC8D5BCE96E3984570CB$

$(2 \mid p_1) = -1$  ;  $(3 \mid p_1) = -1$  ; et on trouve bien,  $(6 \mid p_1) = +1$ .

$p_2 = 062AC9EC42AA3E688DC2BC871C8315CB939089B61DD7$

25  $(2 \mid p_2) = +1$  ;  $(3 \mid p_2) = -1$  ; et on trouve bien,  $(6 \mid p_2) = -1$ .

$p_3 = 0BCADEC219F1DFBB8AB5FE808A0FFCB53458284ED8E3$

$(2 \mid p_3) = -1$  ;  $(3 \mid p_3) = +1$  ; et on trouve bien,  $(6 \mid p_3) = -1$ .

$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = \text{FFFF5401ECD9E537F167A80C0A9111986F7A8EBA4D}$

6698AD68FF670DE5D9D77DFF00716DC7539F7CBBCF969E73A0C49

761B276A8E6B6977A21D51669D039F1D7

$Q_{1,1} = 0260BC7243C22450D566B5C6EF74AA29F2B927AF68E1$

$Q_{2,1} = 0326G12FC7991ECDG9BB8D7C1C4501BE1BAE9485300E$

$Q_{1,2} = 02D0B4CC95A2DD435D0E22BFBB29G59418306F6CD00A$

$Q_{2,2} = 045ECB881387582E7C556887784D2671CA118E22FCF2$

$Q_{1,3} = B0C2B1F808D24F6376E3A534EB555EF54E6AEF5982$

$Q_{2,3} = 0AB9F81DF462F58A52D937E6D81F48FFA4A87A9935AB$

$Q_1 = 27F7B9FC82C19ACAE47F3FE9560C3536A7E90F8C3C51E13C$

$35F32FD8C6823DF753685DD63555D2146FCDB9B28DA367327DD6$

$EDDA092D0CF108D0AB708405DA46$

$Q_2 = 230D0B9595E5AD388F1F447A69918905EBFB05910582E5BA64$

$9C94B0B2661E49DF3C9B42FEF1F37A7909B1C2DD54113ACF87C6$

$F11F19874DE7DC5D1DE2A9252D$

Dans la présente demande, on a décrit un procédé pour produire des jeux de clés  $GQ_2$ , à savoir, des modules  $n$  et des couples de valeurs publique  $G$  et privée  $Q$  dans le cas où l'exposant  $v$  est égal à  $2^t$ . Ces jeux de clés sont utilisés pour mettre en œuvre un procédé destiné à prouver l'authenticité d'une entité et/ou l'intégrité et/ou l'authenticité d'un message ainsi que cela a été décrit.

Dans les demandes pendantes déposées le même jour que la présente demande par France Télécom, TDF et la Société Math RiZK et ayant pour inventeurs Louis Guillou et Jean-Jacques Quisquater, les traits caractéristiques des procédés, systèmes et dispositifs destinés à prouver l'authenticité d'une entité et/ou l'intégrité et/ou l'authenticité d'un message ont été revendiqués. Ces deux demandes sont incorporées ici par référence.

### Revendications

1. Dans un procédé destiné à prouver à une entité contrôleur,

- l'authenticité d'une entité et/ou

- l'intégrité d'un message  $M$  associé à cette entité,

5 au moyen de tout ou partie des paramètres suivants ou dérivés de ceux-ci:

- un module public  $n$  constitué par le produit de  $f$  facteurs premiers

$p_1, p_2, \dots, p_f$  ( $f$  étant supérieur ou égal à 2),

- un exposant public  $v$  ;

-  $m$  nombres de base  $g_1, g_2, \dots, g_m$  entiers, distincts, ( $m$  étant supérieur

10 ou égal à 1), les nombres de base  $g_i$  étant tel que :

les deux équations (1) et (2) :

$$x^2 \equiv g_i \pmod{n} \quad \text{et} \quad x^2 \equiv -g_i \pmod{n}$$

n'ont pas de solution en  $x$  dans l'anneau des entiers modulo  $n$ ,

et tel que :

15 l'équation (3):

$$x^v \equiv g_i^2 \pmod{n}$$

a des solutions en  $x$  dans l'anneau des entiers modulo  $n$  ;

le procédé selon l'invention permettant de produire les  $f$  facteurs premiers

$p_1, p_2, \dots, p_f$  de telle sorte que les équations (1), (2) et (3) soient satisfaites ;

20 ledit procédé comprenant l'étape de choisir en premier :

• les  $m$  nombres de base  $g_1, g_2, \dots, g_m$ ,

• la taille du module  $n$ ,

• la taille des  $f$  facteurs premiers  $p_1, p_2, \dots, p_f$ .

2. Procédé selon la revendication 1 tel que, dans le cas où l'exposant  
25 public  $v$  est de la forme :

$$v = 2^k$$

où  $k$  est un paramètre de sécurité plus grand que 1, on choisit également en  
premier le paramètre de sécurité  $k$ .

3. Procédé selon l'une quelconque des revendications 1 ou 2 tel que

les  $m$  nombres de base  $g_1, g_2, \dots, g_m$ , sont choisis au moins en partie parmi les premiers nombres entiers.

4. Procédé selon l'une quelconque des revendications 2 ou 3, tel que le paramètre de sécurité  $k$  est un petit nombre entier, notamment inférieur à 100.

5. Procédé selon l'une quelconque des revendications 1 à 4, tel que la taille du module  $n$  est supérieure à plusieurs centaines de bits.

6. Procédé selon l'une quelconque des revendications 1 à 5, tel que les  $f$  facteurs premiers  $p_1, p_2, \dots, p_f$  ont une taille voisine de la taille du module  $n$  divisé par le nombre  $f$  de facteurs.

7. Procédé selon l'une quelconque des revendications 1 à 6, tel que parmi les  $f$  facteurs premiers  $p_1, p_2, \dots, p_f$

- on choisit un nombre  $e$  de facteurs premiers congrus à 1 modulo 4,  $e$  pouvant être nul (dans le cas où  $e$  est nul le module  $n$  sera ci-après qualifié de module basique, dans le cas où  $e > 0$  le module  $n$  sera ci-après qualifié de module mixte),

- les  $f-e$  autres facteurs premiers sont choisis congrus à 3 modulo 4,  $f-e$  étant au moins égal à 2.

8. Procédé selon la revendication 7 tel que pour produire les  $f-e$  facteurs premiers  $p_1, p_2, \dots, p_{f-e}$  congrus à 3 modulo 4, on met en oeuvre les étapes suivantes :

- on choisit le premier facteur premier  $p_1$  congru à 3 modulo 4,

- on choisit le deuxième facteur premier  $p_2$  tel que  $p_2$  soit complémentaire de  $p_1$  par rapport au nombre de base  $g_1$ ,

- on choisit le facteur  $p_{i+1}$  en procédant comme suit en distinguant deux cas :

(1) Cas où  $i > m$

• on choisit le facteur  $p_{i+1}$  congru à 3 modulo 4,

(2) Cas où  $i \leq m$

• on calcule le profil ( $\text{Profil}_i(g_i)$ ) de  $g_i$  par rapport aux  $i$  premiers facteurs premiers  $p_i$ ,

• si le  $\text{Profil}_i(g_i)$  est plat, on choisit le facteur  $p_{i+1}$  tel que  $p_{i+1}$  soit complémentaire de  $p_i$  par rapport à  $g_i$ ,

5      • sinon, on choisit parmi les  $i-1$  nombres de bases  $g_1, g_2, \dots, g_{i-1}$  et toutes leurs combinaisons multiplicatives le nombre, ci-après dénommé  $g$ , tel que  $\text{Profil}_i(g) = \text{Profil}_i(g_i)$ , on choisit ensuite  $p_{i+1}$  tel que  $\text{Profil}_{i+1}(g_i) \neq \text{Profil}_{i+1}(g)$ ,

10      (les expressions "complémentaire", "profil", "profil plat" ayant le sens défini dans la description).

9. Procédé selon la revendication 8 tel que pour choisir le dernier facteur premier  $p_{f-e}$  on procède comme suit, en distinguant trois cas :

(1) Cas où  $f-e-1 > m$

• on choisit  $p_{f-e}$  congru à 3 modulo 4,

15      (2) Cas où  $f-e-1 = m$

• on calcule  $\text{Profil}_{f-e-1}(g_m)$  par rapport aux  $f-e-1$  premiers facteurs premiers, de  $p_1$  à  $p_{f-e-1}$ ,

• • si  $\text{Profil}_{f-e-1}(g_m)$  est plat, on choisit  $p_{f-e-1}$  tel qu'il soit complémentaire de  $p_1$  par rapport à  $g_m$ ,

20      • • sinon,

• • • on choisit parmi les  $m-1$  nombres de bases de  $g_1$  à  $g_{m-1}$  et toutes leurs combinaisons multiplicatives le nombre, ci-après dénommé  $g$ , tel que  $\text{Profil}_i(g) = \text{Profil}_i(g_i)$ , puis

25      • • • on choisit ensuite  $p_{f-e}$  tel que  $\text{Profil}_{f-e}(g) \neq \text{Profil}_{f-e}(g_m)$ ,

(3) Cas où  $f-e-1 < m$

• on choisit  $p_{f-e}$  tel que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

(3.1) Première condition,

• on calcule  $\text{Profil}_{f-e-1}(g_{f-e-1})$  par rapport aux  $f-e-1$  premiers facteurs premiers, de  $p_1$  à  $p_{f-e-1}$ .

• • si  $\text{Profil}_{f-e-1}(g_{f-e-1})$  est plat, on choisit  $p_{f-e}$  tel qu'il satisfasse à la première condition d'être complémentaire de  $p_1$  par rapport à  $g_{f-e-1}$ ,

• • sinon,

• • • on choisit parmi les  $f-e-1$  nombres de bases de  $g_1$  à  $g_{m-1}$  et toutes leurs combinaisons multiplicatives le nombre, ci-après dénommé  $g$ , tel que  $\text{Profil}_1(g) = \text{Profil}_{f-e-1}(g_{f-e-1})$ , puis

• • • on choisit ensuite  $p_{f-e}$  tel qu'il satisfasse à la première condition d'être tel que  $\text{Profil}_{f-e}(g) \neq \text{Profil}_{f-e}(g_m)$ ,

(3.2) Deuxième condition,

• on sélectionne parmi l'ensemble des derniers nombres de bases de  $g_{f-e}$  à  $g_m$  ceux dont le profil  $\text{Profil}_{f-e-1}(g_i)$  est plat, puis

• on choisit  $p_{f-e}$  tel qu'il satisfasse à la deuxième condition d'être complémentaire de  $p_1$  par rapport à chacun des nombres de bases ainsi sélectionnés.

10. Procédé selon les revendications 8 ou 9 tel que pour produire les  $e$  facteurs premiers congrus à 1 modulo 4, on évalue chaque candidat facteur premier  $p$ , de  $p_{f-e}$  à  $p_f$ , en lui faisant subir les deux tests successifs suivants :

(1) Premier test

- on calcule le symbole de Legendre de chaque nombre de base  $g_i$ , de  $g_1$  à  $g_m$ , par rapport au facteur premier  $p$  candidat,

• si le symbole de Legendre est égal à -1, on rejette le candidat  $p$

• si le symbole de Legendre est égal à +1, on poursuit l'évaluation du candidat  $p$  en passant au nombre de base suivant, puis lorsque le dernier nombre de base a été pris en compte on passe au

deuxième test,

(2) Deuxième test,

- on calcule un nombre entier  $t$  tel que  $p-1$  est divisible par  $2^t$  mais pas par  $2^{t+1}$ , puis

5 - on calcule un entier  $s$  tel que  $s = (p-1+2^t)/2^{t+1}$ ,

- on applique la clé  $\langle s, p \rangle$  à chaque valeur publique  $G_i$  pour obtenir un résultat  $r$

$$r \equiv G_i^s \pmod{p}$$

10 • si  $r$  est égal à  $g_i$  ou  $-g_i$ , on poursuit le deuxième test en passant à la valeur publique  $G_{i+1}$  suivante,

• si  $r$  est différent de  $g_i$  ou  $-g_i$ , on calcule un facteur  $u$  en appliquant l'algorithme suivant :

• • l'algorithme consiste à répéter la séquence suivante pour un indice  $ii$  allant de 1 à  $t-2$  :

15 • • l'algorithme met en oeuvre deux variables :  $w$  initialisée par  $r$  et  $jj = 2^{ii}$  prenant des valeurs allant de 2 à  $2^{t-2}$ , ainsi qu'un nombre  $b$  obtenu par l'application de la clé  $\langle (p-1)/2^t, p \rangle$  à un résidu non quadratique de  $CG(p)$ , puis, on itère les étapes 1 et 2 suivantes,

• • • étape 1 : on calcule  $w^2/G_i \pmod{p}$ ,

20 • • • étape 2 : on élève le résultat à la puissance  $2^{t-ii-1}$

• • • si on obtient  $+1$ , on poursuit le deuxième test en passant à la valeur publique  $G_{i+1}$  suivante,

• • • si on obtient  $-1$ , on calcule  $jj = 2^{ii}$ , puis on remplace  $w$  par  $w \cdot b^{jj} \pmod{p}$ , puis on poursuit l'algorithme pour la valeur suivante de l'indice  $ii$ ,

25 • • à l'issue de l'algorithme, la valeur figurant dans la variable  $jj$  permet de calculer un nombre entier  $u$  par la relation  $jj = 2^{t-u}$ , puis on calcule l'expression  $t-u$ , deux cas se présentent :

• • • si  $t-u < k$ , on rejette le candidat  $p$

... si  $t-u \geq k$ , on continue l'évaluation du candidat  $p$  en poursuivant le deuxième test en passant à la valeur publique  $G_{i+1}$  suivante,

le candidat  $p$  est accepté comme facteur premier congru à 1 modulo 4 si à l'issue du deuxième test, pour toutes les  $m$  valeurs publiques  $G_i$ , il n'a pas été rejeté.

11. Procédé faisant application du procédé, selon l'une quelconque des revendications 1 à 10, permettant de produire  $f$  facteurs premiers  $p_1, p_2, \dots, p_f$ , ledit procédé étant destiné à prouver à une entité contrôleur,

- l'authenticité d'une entité et/ou

- l'intégrité d'un message  $M$  associé à cette entité,

au moyen de tout ou partie des paramètres suivants ou dérivés de ceux-ci:

-  $m$  couples de valeurs privées  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  et publiques  $G_1, G_2, \dots, G_m$  ( $m$  étant supérieur ou égal à 1),

- le module public  $n$  constitué par le produit des  $f$  facteurs premiers  $p_1, p_2, \dots, p_f$  ( $f$  étant supérieur ou égal à 2),

- l'exposant public  $v$  ;

ledit module, ledit exposant et lesdites valeurs étant liés par des relations du type :

$$G_i \cdot Q_i^v \equiv 1 \pmod{n} \text{ ou } G_i \equiv Q_i^v \pmod{n} ;$$

ledit exposant  $v$  étant tel que

$$v = 2^k$$

où  $k$  est un paramètre de sécurité plus grand que 1 ;

ladite valeur publique  $G_i$  étant le carré  $g_i^2$  du nombre de base  $g_i$  inférieur aux  $f$  facteurs premiers  $p_1, p_2, \dots, p_f$ ; le nombre de base  $g_i$  étant tel que :

les deux équations :

$$x^2 \equiv g_i \pmod{n} \quad \text{et} \quad x^2 \equiv -g_i \pmod{n}$$

n'ont pas de solution en  $x$  dans l'anneau des entiers modulo  $n$

et tel que :

l'équation :

$$x^v \equiv g_i^2 \text{ mod } n$$

a des solutions en  $x$  dans l'anneau des entiers modulo  $n$

ledit procédé met en œuvre selon les étapes suivantes une entité appelée témoin disposant des  $f$  facteurs premiers  $p_i$  et/ou des paramètres des restes chinois des facteurs premiers et/ou du module public  $n$  et/ou des  $m$  valeurs privées  $Q_i$  et/ou des  $f.m$  composantes  $Q_{i,j}$  ( $Q_{i,j} \equiv Q_i \text{ mod } p_j$ ) des valeurs privées  $Q_i$  et de l'exposant public  $v$  ;

- le témoin calcule des engagements  $R$  dans l'anneau des entiers modulo  $n$  ; chaque engagement étant calculé :

• soit en effectuant des opérations du type

$$R \equiv r^v \text{ mod } n$$

où  $r$  est un aléa tel que  $0 < r < n$ ,

• soit

•• en effectuant des opérations du type

$$R_i \equiv r_i^v \text{ mod } p_i$$

où  $r_i$  est un aléa associé au nombre premier  $p_i$  tel que  $0 < r_i < p_i$ , chaque  $r_i$  appartenant à une collection d'aléas  $\{r_1, r_2, \dots, r_f\}$ ,

•• puis en appliquant la méthode des restes chinois ;

- le témoin reçoit un ou plusieurs défis  $d$  ; chaque défi  $d$  comportant  $m$  entiers  $d_i$  ci-après appelés défis élémentaires ; le témoin calcule à partir de chaque défi  $d$  une réponse  $D$ ,

• soit en effectuant des opérations du type :

$$D \equiv r \cdot Q_1^{d1} \cdot Q_2^{d2} \cdot \dots \cdot Q_m^{dm} \text{ mod } n$$

• soit

•• en effectuant des opérations du type :

$$D_i \equiv r_i \cdot Q_{i,1}^{d1} \cdot Q_{i,2}^{d2} \cdot \dots \cdot Q_{i,m}^{dm} \text{ mod } p_i$$

•• puis en appliquant la méthode des restes chinois ;

ledit procédé étant tel qu'il y a autant de réponses  $D$  que de défis  $d$  que

d'engagements  $R$ , chaque groupe de nombres  $R$ ,  $d$ ,  $D$  constituant un triplet noté  $\{R, d, D\}$ .

12. Procédé selon la revendication 11 tel que pour mettre en oeuvre les couples de valeurs privées  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  et publiques  $G_1, G_2, \dots, G_m$ , on utilise les facteurs premiers  $p_1, p_2, \dots, p_r$  et/ou les paramètres des restes chinois, les nombres de bases  $g_1, g_2, \dots, g_m$  et/ou les valeurs publiques  $G_1, G_2, \dots, G_m$  pour calculer :

- soit les valeurs privées  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  en extrayant une  $k$  ième racine carrée modulo  $n$  de  $G_i$ , ou en prenant l'inverse d'une  $k$  ième racine carrée modulo  $n$  de  $G_i$ ,

- soit les  $f.m$  composantes privées  $Q_{i,j}$  des valeurs privées  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ , telles que  $Q_{i,j} \equiv Q_i \pmod{p_j}$ ,

13. Procédé selon la revendication 12 tel que pour calculer les  $f.m$  composantes privées  $Q_{i,j}$  des valeurs privées  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ :

- on applique la clé  $\langle s, p_j \rangle$  pour calculer  $z$  tel que

$$z \equiv G_i^s \pmod{p_j}$$

- on utilise les valeurs  $t$  et  $u$  :

• calculées comme indiqué ci-dessus dans le cas où  $p_j$  est congru à 1 modulo 4 et

• prises respectivement égales à 1 ( $t=1$ ) et 0 ( $u=0$ ) dans le cas où  $p_j$  est congru à 3 modulo 4,

• si  $u$  est nul on considère l'ensemble des nombres  $zz$  tels que :

• • •  $zz$  soit égale à  $z$  ou tel que

• • •  $zz$  soit égale au produit  $\pmod{p_j}$  de  $z$  par chacune des  $2^{ii-t}$  racines  $2^{ii}$  ièmes primitives de l'unité,  $ii$  allant de 1 à  $\min(k, t)$ ,

• si  $u$  est positif on considère l'ensemble des nombres  $zz$  tels que  $zz$  soit égale au produit  $\pmod{p_j}$  de  $za$  par chacune des  $2^k$  racines  $2^k$  ièmes de l'unité,  $za$  désignant la valeur de la variable  $w$  à l'issue de

l'algorithme mis en oeuvre dans la revendication 10,

- on en déduit au moins une valeur de la composante  $Q_{i,j}$ , elle est égale à  $zz$  lorsque l'équation  $G_i \equiv Q_i^v \pmod{n}$  est utilisée ou bien elle est égale à l'inverse de  $zz$  modulo  $p_j$  de  $zz$  lorsque l'équation  $G_i \cdot Q_i^v \equiv 1 \pmod{n}$  est utilisée.

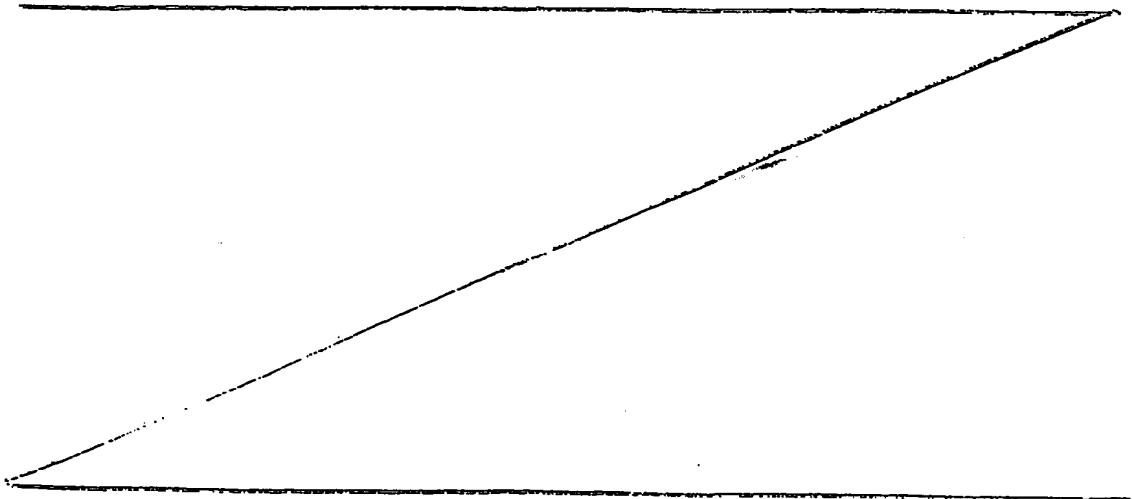
...  $zz$  soit égale au produit  $(\text{mod } p_j)$  de  $z$  par chacune des  $2^{i-t}$  racines  $2^{ii}$  ièmes primitives de l'unité,  $ii$  allant de 1 à  $\min(k, t)$ .

Si  $u$  est positif, on considère l'ensemble des nombres  $zz$  tels que  $zz$  soit égale au produit  $(\text{mod } p_j)$  de  $za$  par chacune des  $2^k$  racines  $2^k$  ièmes de l'unité,  $za$  désignant la valeur de la variable  $w$  à l'issue de l'algorithme ci-dessus décrit.

On en déduit au moins une valeur de la composante  $Q_{i,j}$ . Elle est égale à  $zz$  lorsque l'équation  $G_i \equiv Q_i^v \text{ mod } n$  est utilisée ou bien elle est égale à l'inverse de  $zz$  modulo  $p_j$  de  $zz$  lorsque l'équation  $G_i \cdot Q_i^v \equiv 1 \text{ mod } n$  est utilisée.

D'autres caractéristiques et avantages de l'invention apparaîtront plus clairement à la lecture de la description suivante de modes de réalisation préférentiels, donnés à titre de simples exemples illustratifs et non limitatifs, et des dessins annexés, parmi lesquels :

- les figures 1A et 1D illustrant la fonction décrite par la suite "élever au carré dans  $CG(p)$ ", dans les cas où  $p$  est respectivement congru à 3 (mod 4), 5 (mod 8), 9 (mod 16) et 17 (mod 32) ;
- la figure 2 illustre les solutions de l'équation (3a) discutée par la suite ;
- les figures 3 et 4 illustrent respectivement l'égalité  $G_i = g_i^2$  sur un cycle avec un facteur premier  $p$  congru à 9 (mod 16) et sur une branche avec un facteur premier  $p$  congru à 65 (mod 128).



rang impair est un autre élément ayant le même rang. Par conséquent, la clé  $\langle 2, p \rangle$  permute l'ensemble des  $(p-1)/2'$  éléments de rang impair. Le nombre de cycles de permutation dépend de la factorisation de  $(p-1)/2'$ . Par exemple, lorsque  $(p-1)/2'$  est un nombre premier  $p'$ , il y a un grand cycle de permutation comportant  $p'-1$  éléments.

- Le carré de tout élément de rang pair est un autre élément dont le rang est divisé par deux. Par conséquent, les éléments de rang pair se répartissent sur  $(p-1)/2'$  branches ; chaque élément non nul de rang impair porte une branche de longueur  $t$  comportant  $2^t-1$  éléments, à savoir : un élément de rang divisible par deux mais pas par quatre, puis, si  $t \geq 2$ , deux éléments de rang divisible par quatre mais pas par huit, puis, si  $t \geq 3$ , quatre éléments de rang divisible par huit mais pas par seize, puis, si  $t \geq 4$ , huit éléments de rang divisible par seize mais pas par 32, et ainsi de suite. Les  $2^{t-1}$  extrémités de chaque branche sont des résidus non quadratiques ; leur rang est divisible par  $2^t$ .

Les figures 1A à 1D illustrent la fonction « élever au carré dans  $CG(p)$  » par un graphe orienté où chacun des  $p-1$  éléments non nuls du corps trouve sa place : les résidus non quadratiques sont en blanc et les résidus quadratiques en noir ; parmi les résidus quadratiques, les éléments de rang impair sont encadrés.

Ces figures présentent respectivement :

- figure 1A : cas où  $p$  est congru à 3 (mod 4) ;
- figure 1B : cas où  $p$  est congru à 5 (mod 8) ;
- figure 1C : cas où  $p$  est congru à 9 (mod 16) ;
- figure 1D : cas où  $p$  est congru à 17 (mod 32).

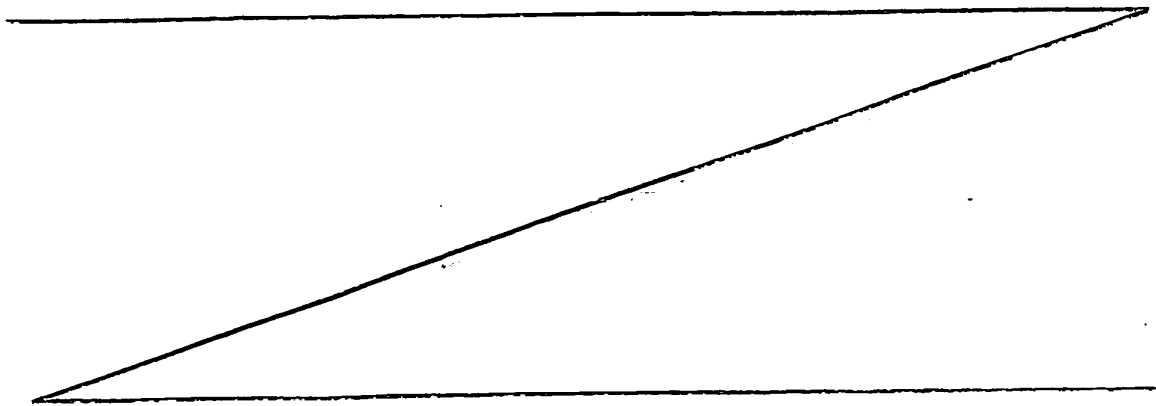
$-g$  par rapport à  $p$  sont différents ; tout résidu quadratique de  $CG(p)$  a deux racines carrées dans  $CG(p)$  : l'une est un résidu quadratique et l'autre un résidu non quadratique. D'une part, une des deux équations (1.a) ou (2.a) a deux solutions en  $x$  dans  $CG(p)$  et l'autre n'en a pas. D'autre part, l'équation (3.a) a deux solutions en  $x$  dans  $CG(p)$  quelle que soit la valeur de  $k$ .

Lorsque  $t = 2$ ,  $p$  est congru à 5 (mod 8). Deux cas se présentent selon le symbole de Legendre de  $g$  par rapport à  $p$ . Lorsque le symbole vaut  $-1$ ,  $g$  et  $-g$  sont deux résidus non quadratiques de  $CG(p)$  : les trois équations (1.a), (2.a) et (3.a) n'ont pas de solution en  $x$  dans  $CG(p)$ . Lorsque le symbole vaut  $+1$ ,  $g$  et  $-g$  sont deux résidus quadratiques de  $CG(p)$ , chaque équation (1.a) et (2.a) a deux solutions en  $x$  dans  $CG(p)$  ; de plus, le rang de  $g^2$  dans  $CG(p)$  est impair, ce qui implique que quelle que soit la valeur de  $k$ , l'équation (3.a) a quatre solutions en  $x$  dans  $CG(p)$  dont une seule de rang impair.

La figure 2 illustre les solutions à l'équation (3.a) avec  $k = 6$  et  $p$  congru à 5 (mod 8), soit  $t = 2$ . Remarquons que, parce que le symbole de Legendre de 2 par rapport à  $p$  congru à 5 (mod 8) vaut  $-1$ ,  $2^{(p-1)/4} \pmod{p}$  est alors une racine carrée de  $-1$ . On a donc :

$$p \equiv 5 \pmod{8}; \text{ par conséquent : } (2|p) = -1$$

$$b \equiv 2^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p}; \text{ donc } b^2 \equiv -1 \pmod{p}$$



La figure 3 illustre  $G_i = g_i^2$  sur un cycle avec un facteur premier  $p$  congru à 9 (mod 16), c'est-à-dire,  $t = 3$ ,  $u = 0$  ainsi que  $k \geq 3$ .

On peut noter que :

$$b \equiv y^{\frac{p-1}{8}} \pmod{p}$$

$$b^8 \equiv 1 \pmod{p}$$

$$b^4 \equiv -1 \pmod{p}$$

5

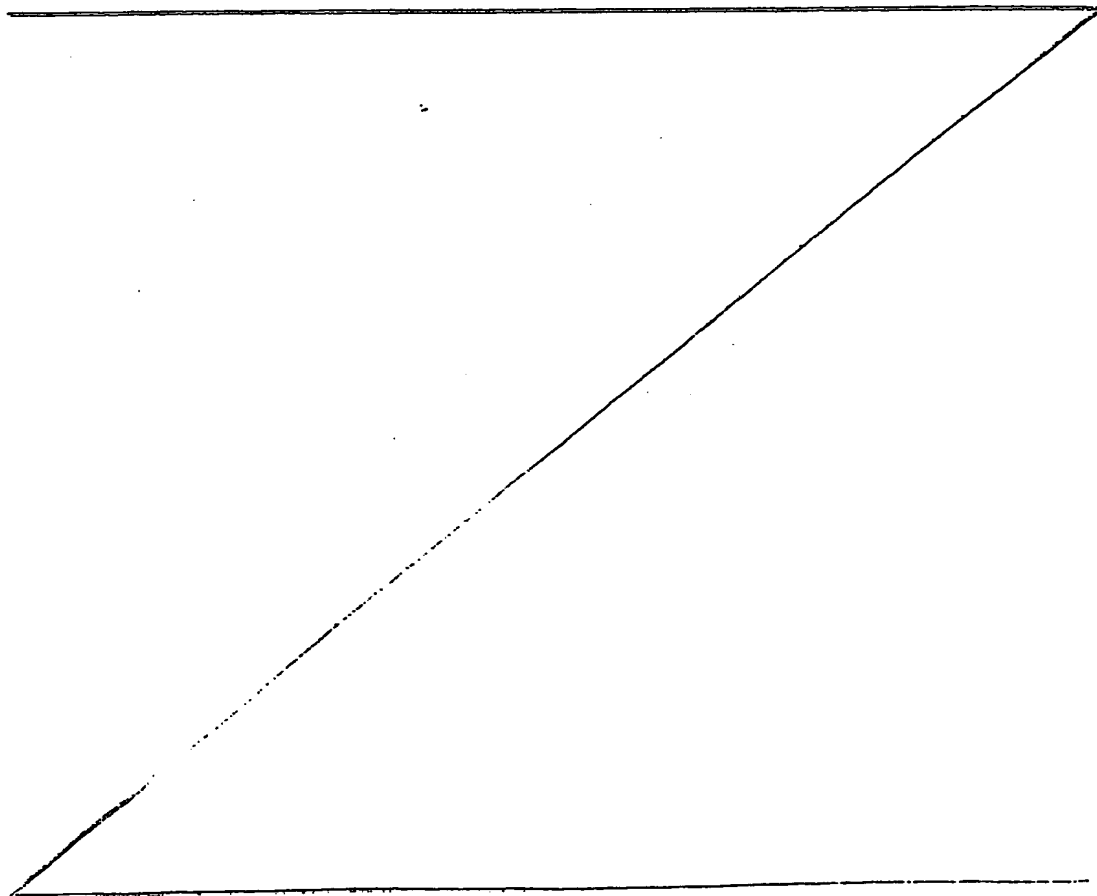
Les racines quatrièmes primitives de l'unité sont :  $b^2$  et  $b^6$ .

Les racines huitièmes primitives de l'unité sont :  $b$ ,  $b^3$ ,  $b^5$  et  $b^7$ .

La figure 4 illustre  $G_i = g_i^2$  sur une branche avec un facteur premier  $p$  congru à 65 (mod 128), c'est-à-dire,  $t = 6$ , ainsi que  $k = 4$  et  $u = 2$ .

10

Voici un premier jeu de clé GQ2 avec  $k = 6$ , soit  $v = 64$ ,  $m = 3$ , soit trois nombres de base :  $g_1 = 3$ ,  $g_2 = 5$  et  $g_3 = 7$ , et  $f = 3$ , soit un module à trois facteurs premiers : deux congrus à 3 (mod 4) et un à 5 (mod 8). Notons que  $g = 2$  est incompatible avec un facteur premier congru à 5 (mod 8).



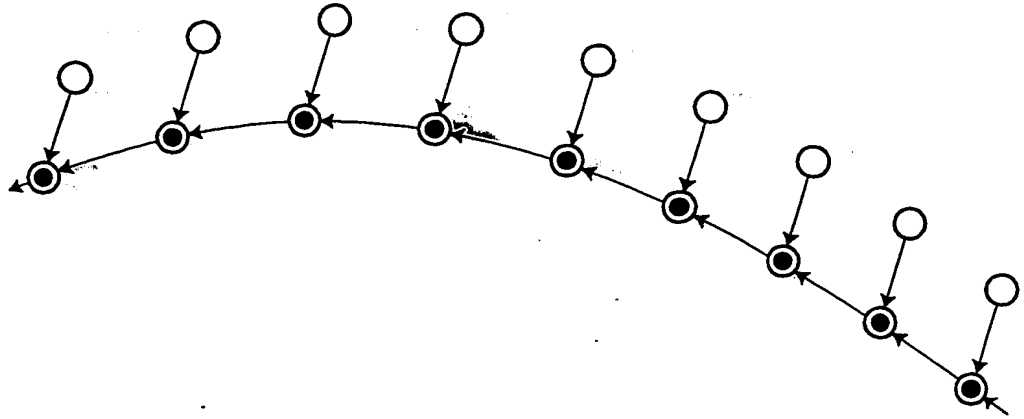


Fig.1A

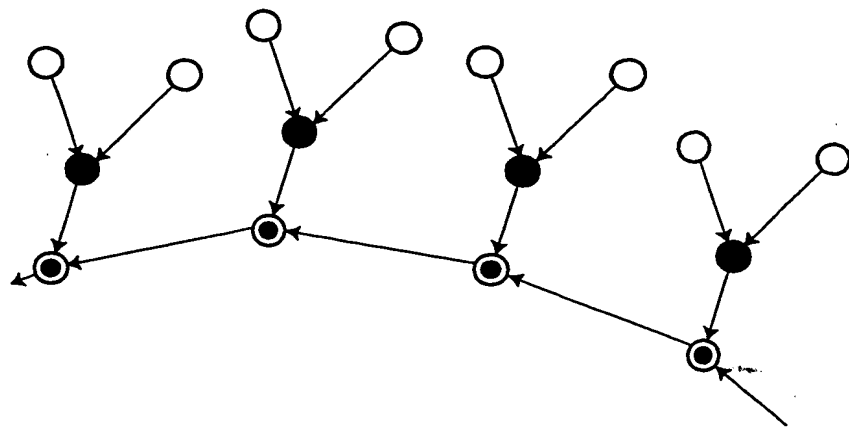


Fig.1B

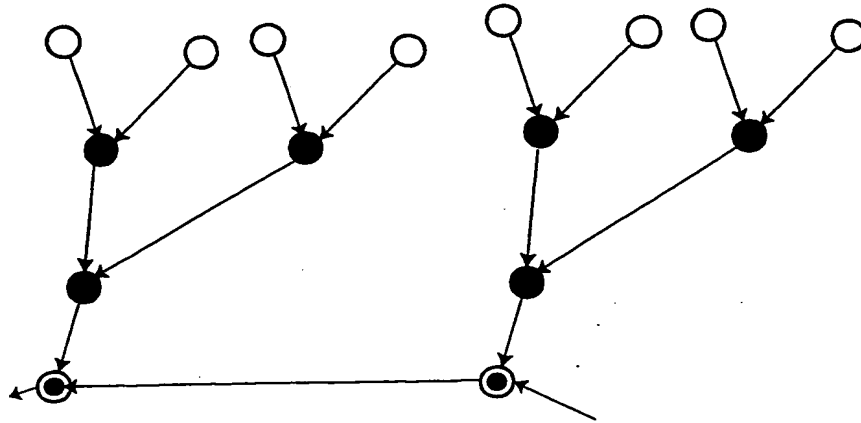


Fig.1C

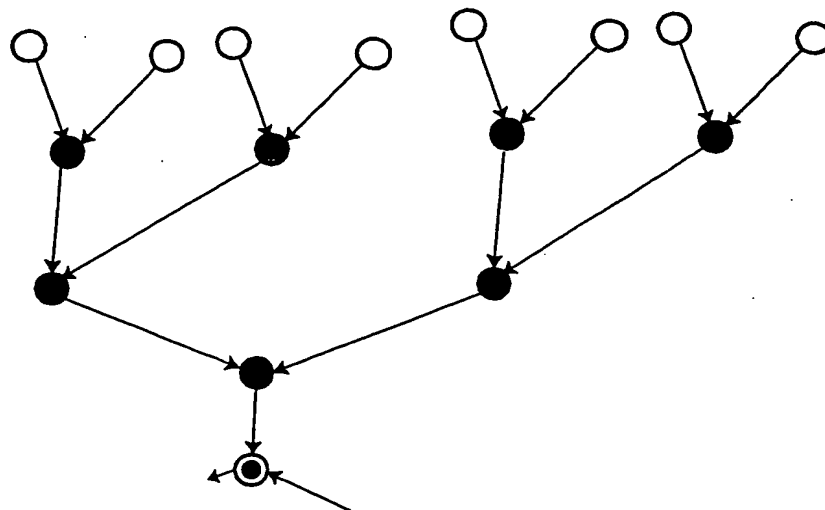


Fig.1D

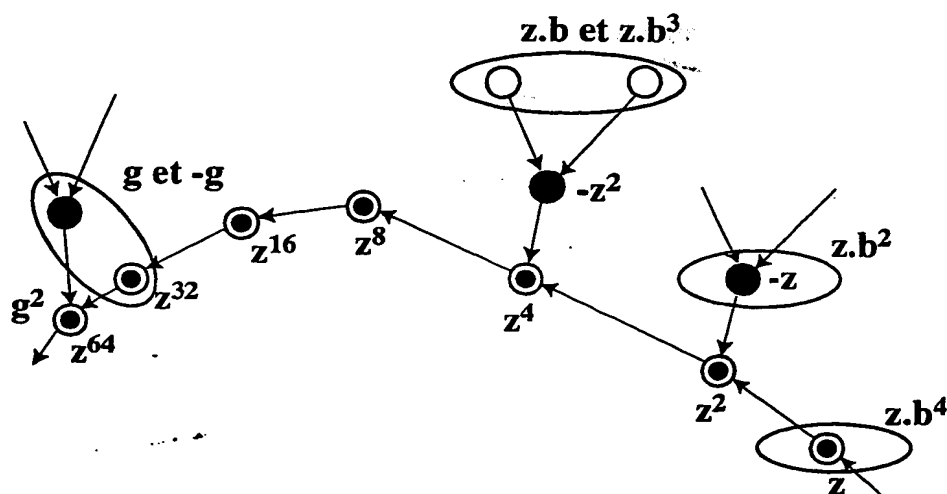


Fig.2

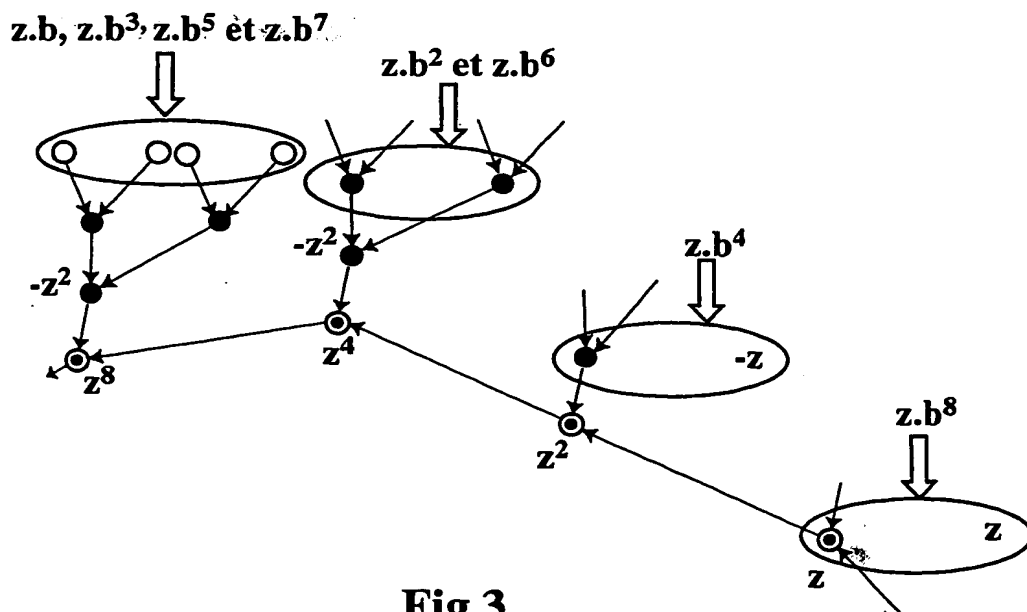


Fig.3

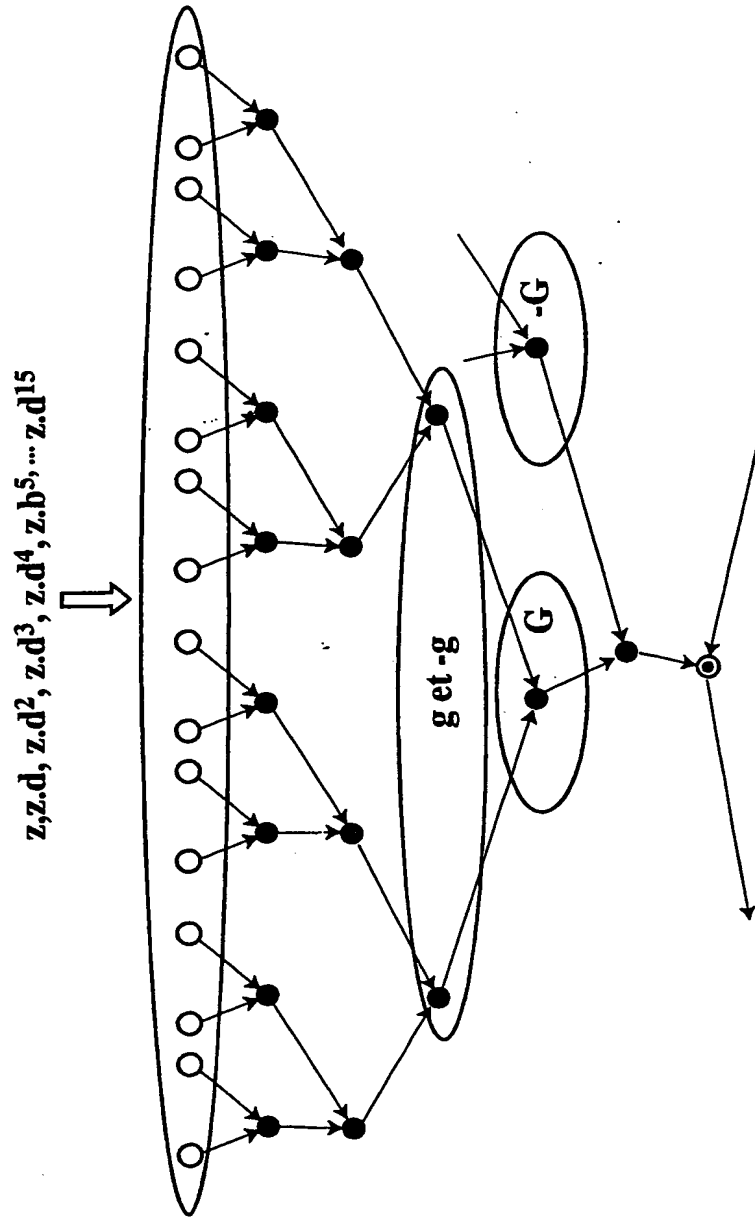


Fig.4

**THIS PAGE BLANK (USPTO)**

**This Page is Inserted by IFW Indexing and Scanning  
Operations and is not part of the Official Record**

## **BEST AVAILABLE IMAGES**

Defective images within this document are accurate representations of the original documents submitted by the applicant.

Defects in the images include but are not limited to the items checked:

- ☒ **BLACK BORDERS**
- ☒ **IMAGE CUT OFF AT TOP, BOTTOM OR SIDES**
- ☐ **FADED TEXT OR DRAWING**
- ☐ **BLURRED OR ILLEGIBLE TEXT OR DRAWING**
- ☐ **SKEWED/SLANTED IMAGES**
- ☐ **COLOR OR BLACK AND WHITE PHOTOGRAPHS**
- ☐ **GRAY SCALE DOCUMENTS**
- ☐ **LINES OR MARKS ON ORIGINAL DOCUMENT**
- ☐ **REFERENCE(S) OR EXHIBIT(S) SUBMITTED ARE POOR QUALITY**
- ☐ **OTHER:** \_\_\_\_\_

**IMAGES ARE BEST AVAILABLE COPY.**

**As rescanning these documents will not correct the image problems checked, please do not report these problems to the IFW Image Problem Mailbox.**

**THIS PAGE BLANK (USPTO)**